

現代教育学部と教師教育 ——深い論理的思考力を有する数学教員の育成を目指して——

神保 雅一*

Teacher Education at School of Contemporary Education: Developing Mathematics Teachers with Deep Logical Thinking Skills

JIMBO Masakazu

要 約

本稿では、まず、平成29年度に設置された中部大学現代教育学部現代教育学科中等教育国語数学教育専攻における数学教育の目標と教育の特徴を概観する。次に、深い論理的思考力を有し、生徒に数学の面白さを伝えられる“引き出しの広い”教員を養成するために、筆者がこれまで携わってきた離散数学および統計学の分野からいくつかの数学素材を紹介し、そこに内在する論理的思考過程を概観する。これらの題材が、数学教員の養成のみならず、現場の教師の自己啓発に繋がり、新たな教材開発の一助となることを期待したい。最後に、化学と統計学を融合した総合的な学習の実施例を紹介する。

キーワード：数学教育、離散数学、ユークリッドの互除法、グラフ理論、オイラー閉路、ハミルトン閉路、鳩ノ巣原理、背理法、統計的仮説検定、比例定数の推定、総合的な学習

1. 現代教育学部における数学教員養成

中部大学現代教育学部では、平成29年度から従来の児童教育学科を発展的に改組して、現代教育学科と名称変更し、現代教育専攻と中等教育国語数学専攻（以後、国語数学専攻）を設置した。現代教育専攻では、従来の児童教育学科の教育課程を継承して主に小学校教員の養成を目標としている。一方、中等教育国語数学専攻は、グローバル化、ICT教育といった新しい時代のニーズに沿った中学校教員を育成することを目指して、平成29年度に新設された。

総合的な学習、アクティブラーニングが叫ばれる中、教師には従前にも増して教育内容に関する幅広い知識と深い理解が必要である。さまざまな予期し

ない児童生徒の疑問に的確に応え、方向性を示唆できる能力を養うには、教師自身が常に疑問を持ち、学び続ける姿勢が重要である。しかし、教師一人一人の力は限られており、個々の研鑽に加えて、教師間の連携も重要であろう。研究グループなどでの情報交換、教材研究とその蓄積が必要であると思われる。

また、冒頭でも述べたとおり、新しい時代の教育に、英語、プログラミングが取り入れられるようになり、グローバル化、ICT教育への対応も求められている。数学教育に限らず、小学校では英語教育が導入されて児童の国際感覚を涵養する体制が整えられようとしており、教員にもその資質が求められている。また、日本語を母語とする児童生徒に対する従来の教育に加えて必要に応じて多言語での補完教育ができる教員の育成が期待されている。数学にお

* 中部大学現代教育学部現代教育学科

いても、英語に翻訳された数学の教科書も出版されるようになっており、これからの教員には数学に関する基本用語の英語表現などの知識が必要である。国語数学専攻における数学カリキュラムには、「英語で数学」という科目があり、ここでは、英語を母語とする数学教員によって、数学を教えるリテラシー教育が実施される。

また、デジタル教科書も用いられるようになり、これまでの教科書では難しかった動く教材による数学概念の理解も可能になっている。たとえば、図形を連続的に等積変形させることにより「三平方の定理」の証明を可視化し、生徒に直観的な理解を促すこともできる。また、立体図形の視点を移動させて、立体を回転させ、3次元の立体をさまざまな角度から見ることも生徒の理解を助ける良い教材となるであろう。また、小学校にもプログラミング教育が導入されようとしており、数学教員には、ICTを含む計算機科学、情報科学の基礎知識も要求されるであろう。さらに、現代社会では、ビッグデータ、ファイナンスなどの分野で統計的素養が要求されることが少なくない。中学校の数学教職課程では、代数学、幾何学、解析学、「確率論・統計学」、コンピューターの各分野を幅広く履修することが必要であるが、国語数学専攻の数学のカリキュラムは、上記の点に対応すべく、代数学、幾何学、解析学の分野の履修に加えて、「確率論・統計学」、コンピューターに関する分野の多くの科目を必修として、計算機科学、統計科学に強い数学教員の育成を目指している。

また、数学の教科科目と数学教育の連続性を確保すべく、大学の講義では、できる限り中学校および高等学校の数学の教科書を参照し、数学の教科の履修内容と高校までの履修内容との関連を意識した教育を行っている。

しかし、数学教員にとって最も重要な資質は、物事を自ら深く考える論理思考能力であり、生徒に数学の面白さを伝承するプレゼンテーション能力、そして、生徒自らが継続的に論理思考力を涵養するためのモチベーション育成力であろうと思われる。数学教員として将来、総合的な学習、アクティブラーニングに対応するには、生徒の思考過程で生じたさまざまな疑問に対して、その問題解決の糸口を提示し、解決に向けた方向性を示唆できることが必要で

ある。そのためには、問題の本質を見抜き、数学的な定式化、一般化、抽象化といった“問題のクリーニング”を行うことにより、問題の本質だけを浮き彫りにする能力が必要である。

筆者は、国語数学専攻において、数学教員の育成を担当しているが、中部大学赴任までは主に大学における離散数学、情報科学、統計科学を中心に教育研究を行ってきた。そのために、初等中等教育に関する深い知識も経験も有しておらず、数学教育に関する広い見地からの議論を展開することはできない(数学能力の育成については[1]などを参照)。しかし、離散数学の分野には、数学の基礎知識を必要とせず、論理的思考力を育成するために適した素材が無数にあり、そのような素材が紹介されている書物も少なくない。たとえば、[2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] などをはじめとして多くの出版物があるが、特に高等学校への離散数学の導入については、[13]で組織的に研究がなされている。本論稿では、小学校高学年から高校生までが、予備知識を必要とせず児童生徒の基礎知識と能力に応じて問題理解が可能な「離散数学」の分野から題材を選んで問題のクリーニングと解決の過程を、具体例を通して概説する。このようなさまざまな離散数学の問題が、児童生徒に論理的思考力を身に付けさせるための新たな数学教材開発に繋がることを期待したい。

最後に、名古屋大学附属中高等学校において行われている化学と統計学および数学の連携による総合的な学習に筆者が協力している事例を紹介する。

2. 論理的思考力の醸成と離散数学

離散数学(Discrete Mathematics)は計算機科学、情報科学の発展とともにその重要性を増してきた。たとえば、平成24年度から高等学校の数学Aに整数の単元が導入されており、その中に整数の剰余の性質、ユークリッドの互除法が導入されている。実際、インターネットで利用されている公開鍵暗号の分野でRSA暗号などが用いられており、その数学的基礎には素数、整数の性質が深く関与していることが整数の単元の導入に起因していると思われる。ユークリッドの互除法は、2つの整数の最大公約数

を求める算法（アルゴリズム）であるが、最大公約数は、小学校第5学年で学習することになっており、その発見的計算法も学んでいる [14]。たとえば、91と63の最大公約数は7であることは小学生にもすぐわかる。しかし、発見的に公約数を見出す方法は、人間には容易であっても、計算機にその算法を導入するのは困難である。また、共通因数が大きい素数のときには、この方法は人間にも困難である。たとえば、243581と177773の最大公約数を発見的に見つけるのは困難であることが容易に想像できるであろう。インターネットの暗号では、10進数で数百桁から1000桁程度の整数が用いられており、そのような整数の最大公約数を求めるには、ユークリッドの互除法が不可欠である。一方で、そのような大きな整数の最大公約数を求めることは計算機を用いても時間がかかるのではないかと懐疑的に感じる生徒に、数式処理言語を用いて、1000桁程度の整数の最大公約数がパソコンで一瞬のうちに計算できることを体感させることも重要であろう。さらに、ユークリッドの互除法を基礎とした拡張ユークリッドアルゴリズムと呼ばれるアルゴリズムを用いることにより、 $237 \times \square$ を761で割った余りが1になる数 $\square$ 、すなわち、 $237 \times \square \equiv 1 \pmod{761}$ を満たす逆元 $\square$ をシステマティックに計算する算法が得られ、それが現代のインターネットの暗号に用いられている。「整数の性質」が高等学校の学習指導要領に導入された当初は、教員から戸惑いの声もあったと聞くが、このような、数学的原理を理解することにより、実社会で用いられている暗号を完全なブラックボックスとして使用するのではなく、その原理をある程度理解できる能力を涵養することに繋がるであろう。ユークリッドの互除法は高等学校数学A [15] で学習するが、その原理を理解することは中学生にもさほど困難ではないであろう。実際、 $91 = 63 \times 1 + 28$ となることから、「91と63の最大公約数は、63と28の最大公約数に等しい」ことを発見することができれば、同様に $63 = 28 \times 2 + 7$ と書くことにより、「63と28の最大公約数は28と7の最大公約数、すなわち7である。よって、91と63の最大公約数は7である。」という結論に達するであろう。このプロセスを理解することができれば、243581と177773の最大公約数を求める計算にも自らチャ

レンジできるであろう。教師は、生徒の理解と興味に応じて、アクティブラーニングなどの題材として、このような課題を提示し、論理的思考力を醸成するのも良いであろう。

3. グラフ理論を題材とした論理的思考力の養成

一口に離散数学と言っても、その領域は非常に広く、実社会での応用範囲も計算機科学に限らず、交通網の解析、衛星の太陽光パネルの折り畳みに用いる折り紙の理論などさまざまな分野に広がっている。また、離散数学には、児童生徒の論理思考力の育成に適したテーマが数多く存在しており、さまざまな内容の教材がいろいろな図書、文献などに提示されている。たとえば、[16] では本節で主題となっているグラフ理論を題材とした数学教育に触れている。オイラー閉路の問題も理論的な洞察力を養う良い例であろう（[17] など参照）。

18世紀初頭、東プロイセンにケーニッヒスベルグ(Königsberg, 現在のロシアのカーニングラード)と呼ばれる町があり、その町には図1のように7つの橋が架けられていた。数学者オイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)は、これらの7つの橋を1回ずつ渡って元の場所に戻ってくることができるかという問題を考え、それが不可能であることを示した。

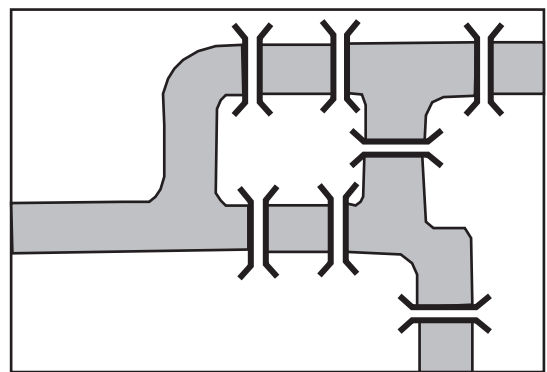


図1 ケーニッヒスベルグの橋

この問題は一筆書きの問題といった方が平易であろうが、オイラーに因んでオイラー閉路問題とも呼ばれている。ケーニッヒスベルグの橋の問題は、小学生にも理解でき、個々の能力に応じてさまざまな

レベルで問題を設定することができる。ケーニッヒスベルグの橋の問題のように具体例について個別の一筆書きの問題を解くレベルから、一般的にさまざまな地図について一筆書きが可能であるための必要十分条件を見出してその証明を試みるレベルまで段階を追って問題を考えることができる。その際に、いずれのレベルにおいても問題の数学的モデル化を行うことが問題解決の重要なプロセスとなる。たとえば、ケーニッヒスベルグの橋の問題を、図2のように、川で区切られた4つの陸地を黒丸（頂点と呼ぶ）で表し、陸地の間を結ぶ橋を頂点と頂点を結ぶ線（辺と呼ぶ）で表した図（グラフと呼ぶ）で表現することにより、川の形状、広さ、曲がり方などの余分な情報を除去して、本質的に必要な情報だけを抽出する作業を行う。これにより、その後の思考を単純にすることができる。いわゆるモデル化と呼ばれる数学的抽象化である。ケーニッヒスベルグの橋の問題は図2の任意の頂点から出発して7つのすべての辺を1回ずつ通って元の頂点に戻れるかという問題であると考えることができる。このように川、橋、陸地などの問題の具象物をグラフの頂点、辺に抽象化することにより問題の本質をクリーニングして抽出することができる。

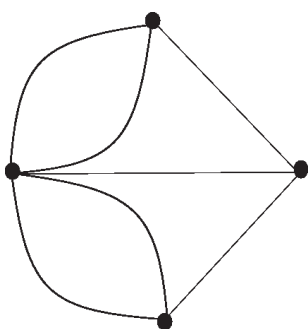


図2 グラフによる表現

この問題の場合、4つの各頂点からそれぞれ、5、3、3、3本の辺が出ており、奇数の頂点が1つ以上存在する（この場合はすべて奇数）ことに注目すると、すべての辺を1回ずつ通って元の頂点に戻る一筆書きは不可能であることがわかる。実際、もし一筆書きが可能であるとする一筆書きの道筋は1つの頂点に入ってその頂点から出るため、入る辺と出る辺が組になっており、一度、頂点を通るたびに2本の

辺を用いることになる。したがって、あるグラフが一筆書き可能であるとするどどの頂点の辺の数も偶数でなければならない（必要条件）。

このような思考力を養うことは小学生から高校生まで学年によらず可能であろう。また、思考の過程を文章あるいは言葉で表現するプレゼンテーション能力を養うにも良い題材であろう。ただし、「すべての頂点の辺の数が偶数であれば、必ず一筆書きは可能か？」という十分条件を考える問題は残っており、この問題は高校生レベルの思考力を要するであろう。

離散数学における別の例を考えてみよう。

次の問題は、小関 [18] が紹介している。

問題：図3のように、5×5マスのチェス盤上にナイトの駒が置かれている。ナイトは、図のように桂馬飛びに×のいずれかの位置に移動できる。桂馬飛びを繰り返してすべてのセルを通して元に戻るることができるか？

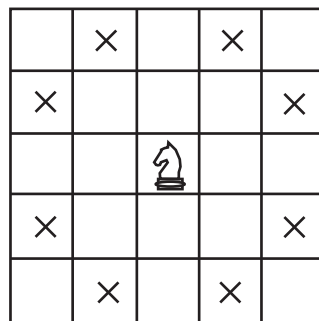


図3 5×5のチェス盤

この問題は、図4のように各セルを白と黒で市松模様に塗ると、ナイトは白いセルと黒いセルを交互に移動することがわかるであろう。このことを考慮して、グラフの問題として定式化すると問題の解が容易に見通せる。5×5の盤面の25個のセルをグラフの頂点として、黒のセルに対応する頂点を右側に、白のセルに対応する頂点を左側に配置して、ナイトが1回で移動できる頂点間を辺で結び、図5のグラフを完成させる。このグラフの辺をたどり、各頂点（セル）を1回ずつ通って元に戻るには白の頂点と黒の頂点を交互に通って元に戻らなければならない

が、白の頂点の方が黒の頂点より1個多いため、それは不可能であることがわかる。

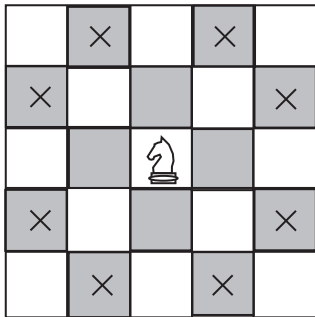


図4 白黒のセルに塗る



図5 グラフ表現

この問題においても、ケーニッヒスベルグの問題と同様に、盤面、ナイトの桂馬飛びの動きなどの情報は削除されて、問題の本質だけが浮き彫りにされており、本質が見通しやすい抽象的表現に縮約されている。なお、この問題を4×4のチェス盤で考えると上記の論理だけでは解決できず問題はすこし複雑になるが、やはり、ナイトがすべてのセルを一回ずつ通って元に戻ることはできないことが示される[18]。この問題は、ハミルトン閉路と呼ばれるグラフ理論の分野の問題とみなすことができるが、任意に与えられたグラフにハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題は、一般的には未解決な問題である。

問題：あるパーティに参加した10人全員に各人がパーティで握手をした人数を聞いた。各人が行った握手の人数がすべて異なることはあるだろうか？

この問題は、「鳩ノ巣原理」(Pigeon hole principle)と呼ばれ、私たちが普段、何気なく使っている単純な論法で解決される。鳩ノ巣原理とは、たとえば、9つの巣箱に10尾の鳩を入れると、必ずどこかの巣箱に2尾以上の鳩が入るという原理である。まず、パーティに参加した10人の握手の人数はいずれも0人から9人のいずれかである。しかし、9人と握手をした人がいると、その人は全員と握手をしているから誰とも握手をしていない人、すなわち、握手をした人数が0人の人はいない。したがって、握手の人数は多くても、0人から8人の9通りか、1人から9人の9通りのいずれかである。0から8の9通りの数字に10人の人を対応させると、鳩ノ巣原理により、0から8のうちどれか少なくとも1つの数字が2人の人に対応しなければならない。1人から9人の場合も同様である。鳩ノ巣原理は単純であるが、さまざまな場面で適用されており、有用な原理である。

4. 背理法の考え方の体得

背理法の論理思考法は、数学に限らず社会の中でさまざまな場面に現れる。たとえば、裁判において「疑わしきは罰せず」という原則は、「Aは有罪と仮定しよう」という仮定を設置して、「有罪であるならば、Aはこの時間にこの場所にいないといけない」というような証拠が必要である。しかし、それを示す証拠がない。したがって、Aは有罪であると断定できない。」という論旨はまさに背理法であろう。

統計学における仮説検定の考え方も背理法に基づいている。筆者は統計学の最初の講義で、しばしば次の問題を提示し、各自の数値データに関する感覚を問う。

問題：厚生労働省のウェブページによると、平成26年の新生児の出生数は、男児が515,533人、女児が488,006人、合計1,003,539人であった。この出生数だけを見て、あなたは「男児の方が多く生まれる」と言っていると思いますか？ それとも、「この年は偶然、男児が多かったのであって、女児が多く生まれることもあるかもしれない」と思いますか？

この問題を高校生、大学生に提起すると、概ね上記の2つの意見に分かれる。もちろん、「わからない」という反応もある。

この問題に対して、「どちらの意見が正しいかを確認するにはどうしますか？」と問うと、当然のことであるが、「他の年のデータを調べてみる。」という意見が出る。そこで、「“このデータだけを見て”という限定をされた場合にはどう判断するのでしょうか？」と問いかける。そして議論を進展させるために、「表と裏がそれぞれ1/2の確率で出るコインを投げて表が出たら男児が生まれ、裏が出たら女児が生まれたと考えることにしましょう。このコイン投げを1,003,539回行って、表が何回出るかを調べると平成26年の結果と同じような結果が出るでしょうか？」と問題を確率の問題に置き換えて提示する。そして、「と言っても、1,003,539回もコイン投げを行うことは不可能でしょうね。でも、幸いなことに私たちはパソコンを使うことができます。パソコンで1,003,539回コイン投げを行うには、乱数を用いれば容易にできます。」と言って、パソコンの実験で表裏がそれぞれ何回出たかを見せる。中学生、高校生にパソコンで乱数を発生する実験を行わせるには、かなりの前準備が必要であるので、教員が統計ソフトを用いて発生させて見せるのが良いであろう。「これで平成26年の出生と同じような実験をすることができましたが、私たちは1年分だけでなく、何回も同じ実験を繰り返して平成26年の結果と比べてみましょう。」「何回も同じ実験を繰り返すということは、何年分もデータを集めることに対応しますね。10回繰り返せば、10年分の、100回繰り返せば、100年分のデータが収集できます。ここでは、100万年分のデータを集めて、男児の出生数を見てみましょう。」と言って、パソコンで100万回の試行を行った結果を図6のようにヒストグラムにして見せる。「この図を見ると、男児の数は、501,800人を中心にして、50万人から50万3500人位までの間の値をばらついていきます。平成26年の男児の数は、515,533人ですが、このコンピューター実験では100万年に1回も平成26年のような男児の数は起こらないことがわかります。」と伝えて、このことが何を意味しているか考えをまとめてもらう。

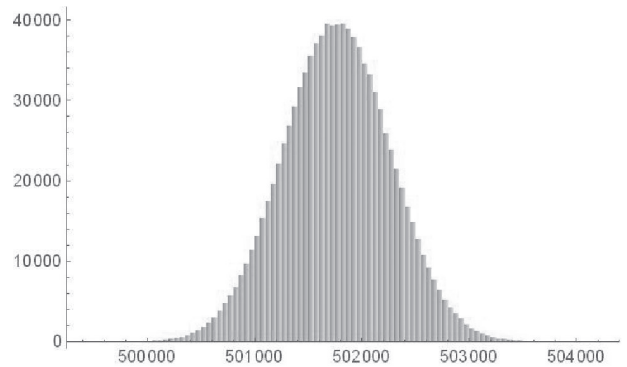


図6 コインを1003539回投げる試行を100万回くりかえした際の表の回数の分布

最後に、教師は、この思考過程を整理して統計的仮説検定の考え方を説明する。

(1) まず、2つの意見を仮説としてまとめる。

仮説1：男児と女児の出生比は1:1である。(この仮説を帰無仮説と呼ぶ)

仮説2：男児の方が高い確率で生まれる。(この仮説を対立仮説と呼ぶ)

(2) 次に、仮説1(帰無仮説)が真であると仮定して、推論を進める。ここでは、表裏がいずれも確率1/2で出るコインを1003539回投げる試行を100万回繰り返した際の表の回数の分布を調べる。

(3) この結果、もし、男児と女児が生まれる比率が同じであれば、コイン投げと同様の結果が得られるはずであるが、コイン投げの100万回の試行で表の数(男児の数に対応)は多くても、503,500程度であったのに、平成26年の男児の出生数は515,533人とコイン投げの結果とは大きくかけ離れており、もし、仮説1が真であれば、100万年に一度も起こらないような非常に稀なことが平成26年に起こったことになる。したがって、仮説1は支持できない。すなわち、仮説1は棄却される。

仮説検定の考え方は、数学の背理法と同じ考え方に基づく推論であり、仮説1と仮説2を平等に並置して議論するのではなく、仮説1(帰無仮説)を真と仮定して議論を進める。この考え方は背理法と対比することにより理解が容易になると思われる。

最後に、この問題を考えた感想を聞くと、「このような考え方をしたことがなかったので、新鮮であった。」「統計を面白く感じた。」という感想が少

なくなく、筆者は統計学の導入としてのモチベーション作りに利用している。この問題を中学生に提示したことはないが、生涯学習の講義や高校1年生への講義では、受講生は問題の趣旨を十分に理解しており、中学生にも理解できる内容であると思われる。なお、この問題は高等学校の数学B [15] で学ぶ中心極限定理（あるいは二項分布の正規近似）を用いることにより、パソコンによる実験を行わずとも理論的に解決できる問題であるが、高校生にとって中心極限定理は難しい定理であり、パソコンによる結果を示して中心極限定理の正当性を示すにも良い題材であろう。統計学の書物は非常に多く出版されているが、[19] [20] [21] などには、さまざまなデータが紹介されており、実データを示してデータを読み解く能力を身に着ける良い題材となると思われる。

もう一度、離散数学の問題に戻ろう。

問題：パーティに6人の人が集まった。「この6人の中には、お互いに知り合いの3人がいるか、あるいはお互いに知り合いでない3人がいる。」という主張は本当であろうか？ ただし、AさんはBさんを知っているが、BさんはAさんを知っているという一方的な知り合い関係はないとする。

この問題は、離散数学分野では、ラムゼイの定理として知られているが、この問題も前節のオイラー閉路などの問題のようにグラフで表現すると理解しやすい。6人を図7のようにグラフの頂点で表し、知り合いであるときは実線で結び、知り合いでないときは破線で結ぶ。このとき、6人の中に知り合いの3人がいることは、グラフでは3つの頂点間を結ぶ実線の三角形が存在することを意味し、知り合いでない3人がいることは、3つの頂点間を結ぶ破線の三角形が存在することを意味している。

このように解釈すると、上記の問題もグラフの問題として定式化することができ、問題の理解が容易になる。この問題も小学校高学年の生徒にも問題の意味が理解でき、その論理思考には特別な数学的予備知識を必要としない類の問題である。この問題を

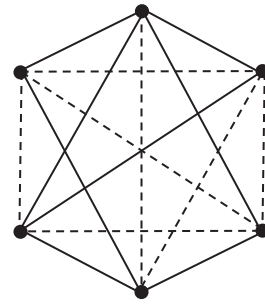


図7 6人の関係を表すグラフ

提示する際には、教師は、児童生徒に問題を具体的に理解させるために、まず実験的に6頂点の間を実線と破線の辺でさまざまに結ぶことを試みさせてみることから始めるであろう（実際には、実線と破線ではなく、赤と青の辺で結ぶ方がグラフを書きやすい）。その際に、児童生徒は当初、やみくもに辺を結び始め、何度実験してもどこかに赤（実線）か青（破線）の三角形ができてしまうことに気づく。そして、「どこにも赤の三角形も青の三角形もないようなグラフを書く」ことにその思考挑戦の方向が定まっていくであろう。しかし、6頂点の場合は辺の数が多すぎて、思考の継続が難しい。

ここで、教師は問題を単純にするために5頂点の場合について同じ問題を考えてみることを提案する。5頂点の場合には、短時間のうちに何人かの生徒がどこにも赤の三角形も青の三角形もない図を描くことができることを発見するであろう。たとえば、図8のように、五角形の外側の辺を赤の辺、内側の辺（対角線）を青の辺とするとどこにも赤の三角形も青の三角形もない。

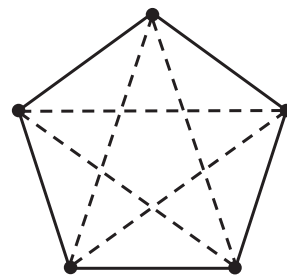


図8 5人の場合

ここで再び6頂点の場合に戻って問題を考え、「どこにも赤の三角形も青の三角形もないようなグラフを書く」ことにチャレンジしようとするであろう。しかし、この問題は5頂点の場合と6頂点の場合で大きな差があり、5頂点の場合には、「どこにも赤

の三角形も青の三角形もないようなグラフを書く」ことができるが、6頂点の場合には、どう辺の色を決めても必ず、どこかに赤の三角形か青の三角形ができる。しかし、この結論に至ることは児童生徒にはかなり難しい。ここで教師は「どこにも赤の三角形も青の三角形もないようなグラフを書くことができますとしましょう。」と言って、“背理法”の論理を展開する。「図9のどれか1つの頂点に注目しよう。頂点Aから5本の辺が出ていますが、この5本に赤と青で色を塗ると、赤が3本以上か青が3本以上ありますね。仮に赤が3本以上あるとしましょう。」と言って、図9を見せ、「この図では、AとB、C、Dは赤で結ばれています。では、BとCは何色で結ばなければなりませんか？」とヒントを与える。児童生徒はBCを赤で結ぶとABCに赤の三角形ができてしまうので、BCが青であることに気づき、さらに同様にCD、DBも青でなければならない。すると、BCDに青の三角形ができてしまう。したがって、“背理法”で「どこにも赤の三角形も青の三角形もないようなグラフを書くことは不可能である」ことが納得できる。このような思考訓練により、小学生のうちから論理的な思考訓練が可能であり、“背理法”の思考過程を自然に体得できるであろう。

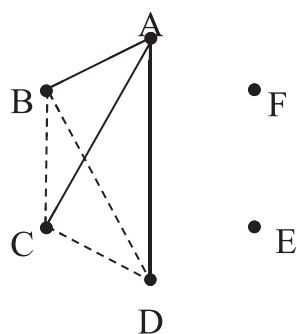


図9 不可能である証明

5. 名古屋大学教育学部附属中・高等学校での総合的な学習の例

統計教育が小中学校の学習指導要領にも導入されており、教師にも統計の正しい知識が必要である。名古屋大学教育学部附属中・高等学校では、平成27年度からSSH（スーパーサイエンスハイスクール）事業の一環として、「SS課題研究Ⅱ：数理探求」と題して、化学と数学（特に統計学）との連

携に関する総合的な学習を試みている [22]。この授業の対象は高校1年生であり、平成28年度は、化学と数学（統計）の授業を受けて、3、4名のグループごとに実験の内容を決めて化学の実験を行い、その実験結果を統計的に解析して、得られた結果を発表するという形式で行われた。筆者は、この授業の中で2回の特別講義を行い、統計の考え方を講義するとともに、生徒が行った化学実験データを統計的に分析を行った結果に評価・コメントを行った。1年目の試みであったこともあり、また、時間的制約もあったため、十分な実験結果が得られなかったグループもあったが、化学と統計および数学が相互に関連していることを実感する良い機会であったと思われる。

この授業では、中和実験、加熱による酸化などをテーマとして取り上げたグループが多く見られた。銅を加熱し、銅の酸化により酸化銅を生成させて、酸化による質量の増加量を量る実験では、銅の質量 $x(g)$ と質量増加量 $y(g)$ の関係が $y=ax$ と比例関係を成すことが想定され、その比例定数を統計的に推定する問題を考えることになる。

この問題には回帰分析が用いられる。単回帰分析は、最小2乗法を用いてデータに直線 $y=ax+b$ を当てはめる手法であるが、その原理を高校生に説明するには2変数関数の最小化について述べる必要がある。しかし、比例関係を表す場合には $b=0$ であり、比例定数 a のみを推定する問題に単純化される。この場合には、最小2乗法は、高校1年生の数学Iで学習する2次関数のグラフの頂点を求める問題に帰着され [15]、統計教育だけでなく、2次関数の実際問題への応用を認識させるという意味もある。

実際、銅の酸化実験において、表1のデータを収集したグループがあり、この実験値に統計モデル $y=ax+e$ (e は各実験で生じる誤差) を当てはめると、各回の誤差の2乗和は、

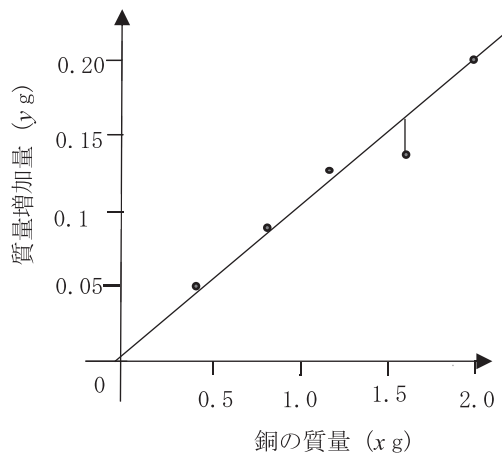
$$\begin{aligned} S &= (0.05 - 0.4a)^2 + (0.0875 - 0.8a)^2 \\ &\quad + \cdots + (0.2 - 2.0a)^2 \\ &= 0.0846875 - 1.72a + 8.8a^2 \end{aligned}$$

となり、未知の比例定数 a の2次関数となる。

この2次関数を最小にすれば、比例定数 a の最小2乗推定値が得られる。したがって、最小値は

表1 銅の酸化実験

銅の質量 x (g)	加熱による質量増加量 y (g)
0.4	0.05
0.8	0.0875
1.2	0.125
1.6	0.1375
2.0	0.2

図10 銅の酸化実験への直線 $y=ax$ の当てはめ

a の2次関数の頂点を求めれば良く、 $a = \frac{1.72/2}{8.8} =$

$0.098 \approx 0.1$ が得られる。図10は、表1のデータをプロットし、直線 $y=0.098x$ を当てはめた結果である。このように、化学と統計の合科学習にさらに2次関数との関連が見られ、統計の理論的根拠の一部を垣間見ることができる。

一般に、統計の理論的バックグラウンドを習得するには、大学での数学、特に解析学を深く学ぶ必要があり、理系の大学の1、2年生にとってもブラックボックスである箇所が多々ある。そのために「統計は難しい、面白くない」といった感想を抱く人が少なくない。特に、初学者にとって、正規母集団に関する議論は、中心極限定理をはじめとして、難解な理論が散在しており、その理論を基礎から学ぶにはハードルが高い。統計は、小、中、高校の数学では、「データの活用」[14]、「データの分析」[23]、「確率分布と統計的な推測」[15]などの単元で教育がなされているが、その理論的背景の理解が、数学教員にも困難なこともあり、理論が述べられずに解

析法が記されていることが多いため、生徒に統計は数学か？という疑問を抱かせる結果となる。さらに、統計的データ解析では数学的素養に加えて、実データを解析する際の異常値の扱い、経済データ、物理データなどにおける場合のモデルの妥当性の検証など、当該分野の専門家の意見を取り入れたモデル構築が不可欠であり、学際的な連携が必要である。そのため、理論の難解さに加えて、統計解析に関する高い習熟度も必要となる。しかし、少なくとも、数学的な側面に関しては、最も単純な場合についてその理論が理解でき、より複雑な場合の統計理論が臆気ながらも想像できるような教育を展開できる素養を持つ教師の育成が必要であろう。実際、統計学はさまざまな分野における解析手法として生まれた学問であり、総合的な学習には適した題材が少なくない。

6. まとめと課題

本稿第1節では、中部大学現代教育学部中等教育国語数学専攻の中学校数学教職課程における教育の特徴を述べた。第2節以降では、生徒に論理的思考法を涵養することを目的とし、アクティブラーニング、総合的な学習に対応できる数学教員としての素養を培うために最適と思われる「離散数学」の数学素材を例示し、また、「統計的思考法」とその総合的な学習への適用例を列举した。

現在、小中学校教員は、教育のみならず、さまざまな学校運営に時間を取られ、自身の教育の幅を広げる自己啓発の時間を確保することが非常に難しくなっているのではないと思われる。教員が生徒に継続的にさまざまな視点から教科に関する興味を抱かせるためには、教員の不断の自己啓発に加えて、研究授業、研究会などの機会を通して、新たな知見・教材を収集・蓄積することが不可欠である。また、それらの教育素材を共有できるシステムを構築し、必要に応じて、教材を自由に利用できる環境が必要であろうと思われる。また、これらの素材を数学教育の教材として使用する際に、どのような方法で教育を行うのが論理的思考力の醸成に有用であるかを研究することも重要であろう。

今後、数学教員を志す学生の皆さんおよび、すで

に教員として現場で教育を行っており、さらに自身の数学教育の滋味を蓄え、生徒に数学への興味と面白さを伝えたいと願っておられる若手教員の皆様にとって拙稿が自身の数学の糧袋を拡げる一助となれば幸いです。

謝辞

本文でも述べたように、数学教育に関する広い知識も経験も有していない筆者に本稿を執筆する機会を与えてくださった編集委員会の皆様に心から感謝致します。

引用文献

- [1] 松岡隆、編、数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究、第 巻1920、京都大学数理解析研究所、2014.
- [2] J. D. Beasley, The Mathematics of Games, Dover NewYork, 2006.
- [3] J. P. Peter Hilton, A Mathematical Tapestry, Cambridge University Press, 2010.
- [4] ハンスマグヌス エンツェンスベルガー、数の悪魔—算数数学が楽しくなる12夜—、晶文社、1998.
- [5] 根上生也、ピジョンの誘惑 論理力を鍛える70の扉、日本評論社、2015.
- [6] 根上生也、人に教えたくなる数学、SoftBank Creative、2007.
- [7] 根上生也、計算しない数学—見えない答えが見えてくる—、青春出版社、2007.
- [8] 秋山 仁、発見的教授法による数学シリーズ、1-5巻、森北出版、2014.
- [9] 秋山仁、松永清子、秋山仁のこんなところにも数学

- が!、扶桑社、2009.
- [10] 芳沢光雄、教科書では教えてくれない! 本当に使える数学 基礎編、実業之友日本社、2014.
- [11] 芳賀和夫、折り紙で楽しむ幾何図形、SBクリエイティブ、2014.
- [12] 銀林浩、数学教育協議会編、折り紙算数・折り紙数学、国土社、1994.
- [13] 長崎栄三、“高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究、” 国立教育政策研究所 教育課程研究センター、2007.
- [14] 文部科学省、“小学校学習指導要領、” 文部科学省、2017.
- [15] 文部科学省、“高等学校学習指導要領、” 文部科学省、2017.
- [16] 金光三男、“教科内容と教科教育両方の視点からのグラフ理論の一事例、” 愛知教育大学研究報告、第65輯、pp. 221-225、2016.
- [17] R. ディーステル、グラフ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、2000.
- [18] 小関 健太、“ハミルトン閉路について、” オペレーションズ・リサーチ、pp. 844-851、2016.
- [19] 柴田里程、データ分析とデータサイエンス、近代科学社、2015.
- [20] 景山三平、あなたのまわりのデータの不思議、実教出版、2017.
- [21] 間瀬茂、鎌倉稔成、神保雅一、工学のためのデータサイエンス入門、数理工学社、2004.
- [22] 名古屋大学附属中・高等学校編著、“平成28年度指定スーパーサイエンスハイスクール研究開発実績報告書、第1年次 (3期)、” 名古屋大学附属中・高等学校、2017.3.
- [23] 文部科学省、“中学校学習指導要領、” 2017.

受付日 2017年 9月29日

受理日 2017年11月 9日