

テンソル解析を用いた回転機の各種特性算定例

中村 雅憲*, 廣塚 功*, 坪井 和男**

Calculations for various rotating machine characteristic using tensor analysis

Masanori NAKAMURA*, Isao HIROTSUKA* and Kazuo TSUBOI**

(Received February 5, 2016)

The origin of tensor analysis started with Dr. Kron of GE (General Electric), who began writing a series in the “General Electric Review” in April 1935 that continued until 1938.

Meanwhile at Chubu University, the late Emeritus Professor of Electrical Engineering, Kunihiro Kato, presented a number of in-depth papers on tensor analysis and related topics.

Building from these papers, we are working to develop a consistent means of theoretical analysis for synchronous, induction, and permanent magnet synchronous machines based on tensor methodology, while further carrying out related characteristic calculations.

Such theoretical analysis is unique in that not only is the derived torque component valid without variation over time, but vibration components and frequencies which vary over time can be calculated as well. This methodology has an important role in the analysis of rotating machine characteristics.

The desire for rotating machines with low vibration and noise levels means vibrating torque component analysis is important, as is finding a way to lessen the aforementioned levels. We expect to see such improvements and further believe they will lead to improved performance of rotating machines.

In this paper, we give an example of tensor analysis for synchronous and induction machines, introducing the analysis procedure and its features.

Keyword: Tensor Analysis, Synchronous Machine, Induction Machine, Characteristics

1. まえがき

テンソル解析は GE(General Electric)の Kron 氏が 1935 年 4 月より「GENERAL ELECTRIC REVIEW」に連載を開始したのがその起源と言え、その後 1938 年まで連載は続いた⁽¹⁾。国内では、その後一例としてテンソル解析の解説も発表されている⁽²⁾。

一方本学の関係では、電気工学科の故加藤邦弘名誉教授がテンソル解析およびそれらに関係の深い論文を数多く発表している^{(3)~(14)}。

これらの論文を元に、我々は一貫として同期機や誘導

機および永久磁石同期電動機の理論解析をテンソル法により展開する取り組みを行っており、それらの特性算定も継続して実施している。

これらの理論解析の特徴は得られたトルク成分が時間的に変動しない有効なトルク成分だけでなく、時間的に変動する振動成分およびその振動周波数まで算出できることであり、回転機の特性解析において重要な役割を持つと考えられる。

最近では回転機の低振動、低騒音が要求される背景から振動するトルク成分が解析でき、さらに減少させる手

*電気システム工学科 (Department of Electrical Engineering)

**学校法人 中部大学 (Chubu University)

段が見いだせればその要求に対して一定の改善が期待でき、回転機の性能向上に繋がると考えられる。

本論文は同期機や誘導機のテンソル解析の一例を挙げて、その解析手順を概略説明し、特徴を紹介するものである。

2. 回転機のテンソル解析手順

テンソル解析を回転機に適用した解析手順は、制動巻線付突極三相同期機を例にとるとおおよそ以下のようになる。

- 1) 対象機に該当するモデルを作成し、それぞれの巻線軸に名称を付け、それに基づいて相軸上の過渡インピーダンステンソルを導出する。
- 2) 三相の固定子巻線については、その相電流を零相、正相および逆相の普通の対称軸に変換し、制動巻線については d 軸インダクタンスと q 軸インダクタンスが異なるため、加藤氏が考案した構造対称軸⁹⁾を用いて変換する。
- 3) 相軸上の過渡インピーダンステンソルを上記の変換行列を用いて、対称軸上の過渡インピーダンステンソルに変換する。すなわち、この変換行列は普通の対称軸と構造対称軸との組み合わせで構成されていることになり、テンソル変換と言われる所以である。
- 4) 定常状態での解析を進める場合は、印加電圧を瞬時値対称分で表示し、重ねの理を用いて電流を求め、最後に合算して電流の一般式を求める。
- 5) トルクはトルクテンソルと上述の電流からトルク成分ごとに算出され、一般に（電流）×（電流）×（リアクタンス）の形で求められる。得られたトルク成分はその算定式に $e^{j\theta}$ を含む成分と含まない成分とに分けられ、含まない成分は非同期性トルクに分類される⁶⁾。また、 $e^{j\theta}$ を含む成分は第一振動性トルクや第二振動性トルクのような振動性トルクに分類され、振動の特徴に合わせて細かく区別されている⁶⁾。
- 6) 特性の算定には各定数を決定することが必要で、同期機の場合は文献(15)を参照できる。また、振動性トルクの各成分の取扱いは文献(16)を参照できる。

3. 突極同期電動機の非同期始動特性の算定例

文献(13)より、解析モデルの図1に示された座標軸での過渡インピーダンステンソルを求めることから始まり、最終的には電流の一般式まで導出し、さらにトルクの成分まで求めていくが、詳細は文献(13)を参照していただき、以下ではその概略を述べることにする。

3.1 相軸上の過渡インピーダンステンソル

解析モデル図の特徴は固定子である三相巻線が回転子側にあり、回転電機子形として描かれていることである。また、回転方向は時計式となっている。

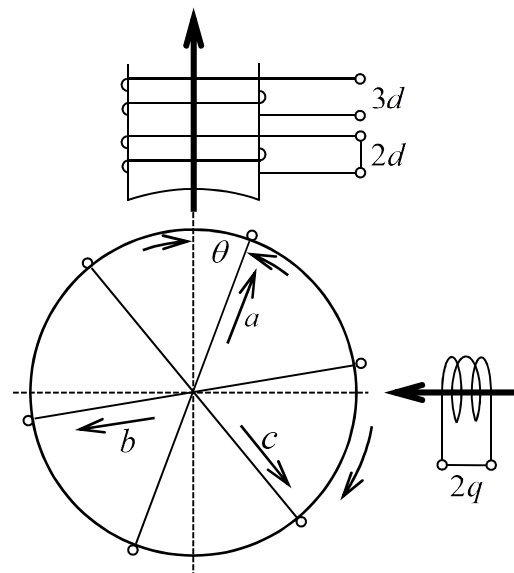


図1 制動巻線付突極同期機の解析モデル図

図1において、 a 、 b および c は三相電機子巻線、 $2d$ および $2q$ は直軸および横軸制動巻線、 $3d$ は界磁巻線を示しており、 θ は突極の中心軸（ d 軸）と a 相電機子巻線の中心軸とのなす角（電気角）を示している。

ここで、空間高調波、鉄損、磁気飽和、近接効果および表皮効果などを無視し、電機子巻線は対称三相巻線を構成しているとすれば、相軸上の過渡インピーダンステンソル $[Z]$ は(1)式のように求められる。

なお、各定数は以下のごとくである。

R_a : 電機子巻線毎相の抵抗（星形結線1相の値）

L_{da} : 電機子巻線毎相の d 軸自己インダクタンス（星形結線1相の値）

L_{qa} : 電機子巻線毎相の q 軸自己インダクタンス（星形結線1相の値）

$$\left. \begin{aligned} L_{Sa} &= \frac{1}{2}(L_{da} + L_{qa}) \\ L_{Da} &= \frac{1}{2}(L_{da} - L_{qa}) \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

$$[Z] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & 2d & 2q & 3d \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} a & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos(2\theta - 120^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos(2\theta - 240^\circ) \end{array} & M_{2da}p \cos \theta & \begin{array}{l} -M_{2qa} \\ \times p \sin \theta \end{array} & M_{3da}p \cos \theta \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} b & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos(2\theta - 120^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} R_a + L_{Sa}p + \\ L_{Da}p \cos(2\theta - 240^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos 2\theta \end{array} & \begin{array}{l} M_{2da} \\ \times p \cos(\theta - 120^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} -M_{2qa} \\ \times p \sin(\theta - 120^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} M_{3da} \\ \times p \cos(\theta - 120^\circ) \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} c & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos(2\theta - 240^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1}{2}M_{Sa}p + \\ M_{Da}p \cos 2\theta \end{array} & \begin{array}{l} R_a + L_{Sa}p + \\ L_{Da}p \cos(2\theta - 120^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} M_{2da} \\ \times p \cos(\theta - 240^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} -M_{2qa} \\ \times p \sin(\theta - 240^\circ) \end{array} & \begin{array}{l} M_{3da} \\ \times p \cos(\theta - 240^\circ) \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 2d & M_{2da}p \cos \theta & \begin{array}{l} M_{2da}p \cos(\theta - 120^\circ) \\ M_{2da}p \cos(\theta - 240^\circ) \end{array} & R_{2d} + L_{2d}p & & M_{23d}p \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 2q & \begin{array}{l} -M_{2qa} \\ \times p \sin \theta \end{array} & \begin{array}{l} -M_{2qa}p \sin(\theta - 120^\circ) \\ -M_{2qa}p \sin(\theta - 240^\circ) \end{array} & & R_{2q} + L_{2q}p & \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 3d & M_{3da}p \cos \theta & \begin{array}{l} M_{3da}p \cos(\theta - 120^\circ) \\ M_{3da}p \cos(\theta - 240^\circ) \end{array} & M_{23d}p & & R_{3d} + L_{3d}p \end{array} \end{array} \quad \text{-----(1)}$$

M_{daa} : 電機子巻線相互間の d 軸相互インダクタンス
(2つの電機子巻線が d 軸に一致したときの仮想最大相互インダクタンス)

M_{qaa} : 電機子巻線相互間の q 軸相互インダクタンス
(2つの電機子巻線が q 軸に一致したときの仮想最大相互インダクタンス)

$$\left. \begin{array}{l} M_{Sa} = \frac{1}{2}(M_{daa} + M_{qaa}) \\ M_{Da} = \frac{1}{2}(M_{daa} - M_{qaa}) \end{array} \right\} \quad \text{-----(3)}$$

R_{2d} : $2d$ 巻線の抵抗, L_{2d} : $2d$ 巻線の自己インダクタンス

R_{2q} : $2q$ 巻線の抵抗, L_{2q} : $2q$ 巻線の自己インダクタンス

M_{2da} : $2d$ 巻線と電機子巻線との相互インダクタンス

ス

M_{2qa} : $2q$ 巻線と電機子巻線との相互インダクタンス

ス

M_{3da} : $3d$ 巻線と電機子巻線との相互インダクタンス

ス

M_{23d} : $2d$ 巻線と $3d$ 巻線との相互インダクタンス

R_{3d} : $3d$ 巻線の抵抗, L_{3d} : $3d$ 巻線の自己インダクタンス

3.2 対称軸上の過渡インピーダンステンソル

(1)式と(2)式および(3)式の定義を用い, 電機子巻線については普通の対称軸を, 制動巻線については構造対称軸を用いて, これらの座標へのテンソル変換は(4)式より算出することができる。

$$[Z_s] = [C]_t^* [Z] [C] \quad \text{-----(4)}$$

ここで, 添え字の t は転置を, $*$ は共役複素数を表

している。

変換行列 $[C]$ は、対称軸と構造対称軸を用いて (5)式
のようになる。

$$\text{ここで、} \alpha = e^{j2\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$$

$$\beta = M_{2da} / M_{2qa}$$

である。

したがって、対称軸と構造対称軸とに変換した過渡インピーダンステンソル $[Z_s]$ は(6)式となる。

	10	1f	1b	2f	2b	3d
a	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$			
b	$1/\sqrt{3}$	$\alpha^2/\sqrt{3}$	$\alpha/\sqrt{3}$			
c	$1/\sqrt{3}$	$\alpha/\sqrt{3}$	$\alpha^2/\sqrt{3}$			
2d				$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	
2q				$-j\beta/\sqrt{2}$	$j\beta/\sqrt{2}$	
3d						1

----- (5)

(6)式において、10 軸は他の座標軸との結合がなく、
また一般には中性点は接続されていないので、省略する
ことができる。

今、角周波数 ω の平衡三相電圧が電機子巻線に印加され、
滑り s で一定に回転している非同期状態とし、 a 相
電圧の最大値を V_m とすれば、

$$v_a = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} V_m e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{2} V_m e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

----- (7)

となり、回転子の速度 θ は

$$\theta = \overline{1-s} \omega t + \psi \quad \text{----- (8)}$$

となる。

なお、 ψ は $t=0$ における a 相巻線と d 軸との初期位
相角である。

3.3 電圧の一般式

これらの関係を用いて、電圧を対称軸に変換すれば、
瞬時値対称分表示で、(9)式のように示される。

1f	$\frac{1}{2} V_{1fm} e^{j(\omega t + \varphi_{1f})}$
1b	$\frac{1}{2} V_{1fm} e^{-j(\omega t + \varphi_{1f})}$
2f	
2b	
3d	

$$[\dot{v}_s] = \quad \text{----- (9)}$$

ただし、

$$V_{1fm} / 2 = V_m / 2\sqrt{2}$$

なお、(9)式において、 $2f$ 軸から $3d$ 軸までは空欄であ
るが、これは電圧が零、すなわち短絡されているとい
ことを示しており、制動巻線は短絡され、界磁巻線も同
様に短絡されている状態を表す。

平衡三相電圧が印加された場合、正相電圧のみが存在
し、(9)式の電圧を別々に(6)式に印加し、算出された電
流を合計することにより、電流の一般式が得られる。

ここでは紙面の都合上、これ以降の展開については説

	10	1f	1b	2f	2b	3d
10	$R_{S1} + L_{01}p$					
1f		$R_{S1} + L_{S1}p$	$L_{D1}pe^{j2\theta}$	$M_{12}pe^{j\theta}$		$M_{13}pe^{j\theta}$
1b		$L_{D1}pe^{-j2\theta}$	$R_{S1} + L_{S1}p$		$M_{12}pe^{-j\theta}$	$M_{13}pe^{-j\theta}$
2f		$M_{12}pe^{-j\theta}$		$R_{S2} + L_{S2}p$	$R_{D2} + L_{D2}p$	$M_{23}p$
2b			$M_{12}pe^{j\theta}$	$R_{D2} + L_{D2}p$	$R_{S2} + L_{S2}p$	$M_{23}p$
3d		$M_{13}pe^{-j\theta}$	$M_{13}pe^{j\theta}$	$M_{23}p$	$M_{23}p$	$R_{d3} + L_{d3}p$

$$[Z_s] = \quad \text{----- (6)}$$

明を割愛するが、詳細は文献(13), (15)および(16)を参照されたい。なお、文献(13)では界磁巻線の $3d$ 軸に直流電圧を印加した式が導出されているが、この場合電機子巻線は無限大母線に接続されており、短絡状態になるので、注意が必要である。そのため、 $1f$ 軸と $1b$ 軸に電流が流れる式が得られている。

3.4 実機特性算定例

表 1⁽¹⁶⁾は算定に必要な定数を示したもので、表 2⁽¹⁷⁾は供試機の仕様を示したものである。なお、表 1 中の「導体棒なし」と「導体棒あり」については表 2 を参照されたい。

特性算定は静止時から同期回転までの非同期始動特性を非振動性トルクと振動性トルクの振幅について行い、図 2 は導体棒を有する供試機の非振動性トルク特性を示したもので、横軸は滑り、縦軸は同期ワットで表したトルクである。

表 1 供試機の定数

定数	機種	導体棒なし	導体棒あり
R_{S1}	(Ω)	0.491	
X_{S1}	(Ω)	7.06	
X_{D1}	(Ω)	2.03	
R_{S2}	(Ω)	0.980	0.790
R_{D2}	(Ω)	-0.086	-0.373
X_{S2}	(Ω)	8.62	9.66
X_{D2}	(Ω)	-2.56	-3.60
R_{d3}	(Ω)	14.6	
X_{d3}	(Ω)	1.79	
X_{m12}	(Ω)	6.31	6.85
X_{m13}	(Ω)	78.3	
X_{m23}	(Ω)	64.5	69.9

表 2 供試機の仕様

機種	定格	制動巻線	短絡環	極間導体棒
導体棒なし	相数 3 極数 4 電圧 200V 周波数 60Hz	銅製 $\phi 8 \times$ 5 本 $\times$ 4 極	銅製 T6 $\times$ 25	なし
導体棒あり	出力 3.7kW 電流 13.5A 界磁電流 2.3A 回転数 1800min ⁻¹		銅製 T6 $\times$ 33	銅製 $\phi 10 \times$ 2 本 $\times$ 4 極

図 2 において、トルク τ_{SS} は界磁巻線の励磁をなしと

し、さらに界磁巻線を短絡して始動した場合のトルクを示し、 τ_{SC} は界磁を励磁した場合のトルクである。なお、いずれのトルク算定においても、電機子巻線への三相電源および界磁巻線への直流電源は無限大母線と仮定している。

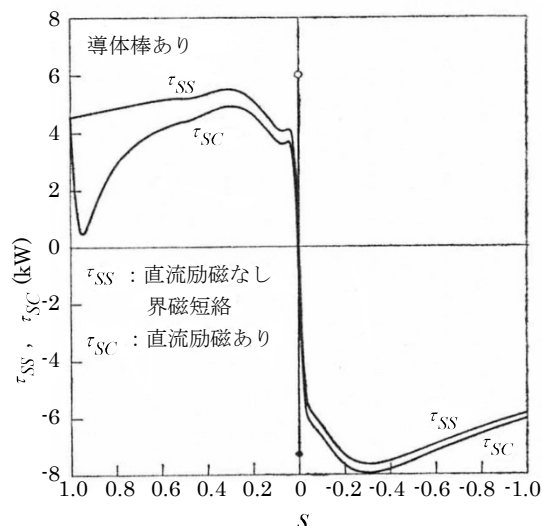


図 2 極間に導体棒を有する供試機の非振動性トルク特性

また、図中滑り 0 の○印および●印はそれぞれ同期性トルクの最大値および最小値を示している。

直流励磁なしで界磁を短絡して始動した場合の特性は誘導電動機の始動特性と類似しているが、直流励磁を印加し、非同期の場合は同期機が脱調している状態となり、励磁により発生するトルクが電動機としてはマイナスの値として発生するので、そのトルク特性は図 2 の τ_{SC} のごとく滑り 0.9 付近で急激の減少する特性となる。なお、 τ_{SC} から τ_{SS} を差し引いたトルクが界磁を励磁し、電機子巻線を短絡した場合のトルクとなり、滑り 1 から -1 の範囲では滑り 1 を除いて負の値となる。

図 3 は同様に導体棒を有する供試機の電機子電流特性を示したもので、横軸は滑り、縦軸は電流(A)、図 4 は振動性トルクの振幅を示したもので、縦軸は同期ワットである。

図 3 において I_{as} 、 I_{ag} および I_{ac} はそれぞれ直流励磁なしで界磁巻線短絡、直流励磁のみで電機子巻線短絡および励磁電流ありの場合の電機子電流を示している。

I_{as} に対応するトルクが図 2 における τ_{SS} で、 I_{ac} に対応するトルクが τ_{SC} である。

I_{ag} に対応するトルクは図 2 には示していないが、この電流は電機子巻線を短絡し励磁を加えた状態で滑り

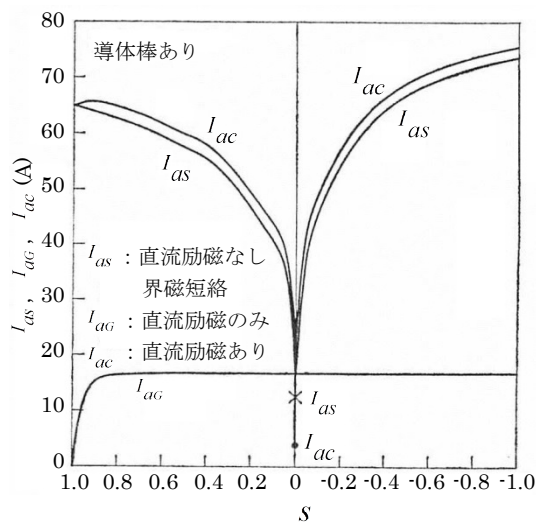


図3 極間に導体棒を有する供試機の
電機子電流特性

を変化させているので、三相短絡試験の滑りに対する特性になる。本供試機では電機子巻線の抵抗が同期リアクタンスに比較して無視できない小形機であり、滑りが約0.9より小さい範囲で電機子電流が一定の値となっている。

なお、 I_{as} の周波数は60Hzと突極性に基づく周波数成分 $(2s-1)f = (2s-1) \times 60\text{Hz}$ からなり、 I_{ag} の周波数成分は $(1-s)f = (1-s) \times 60\text{Hz}$ となる。 I_{ac} は脱調時の電流であり、これら3成分の周波数からなる。

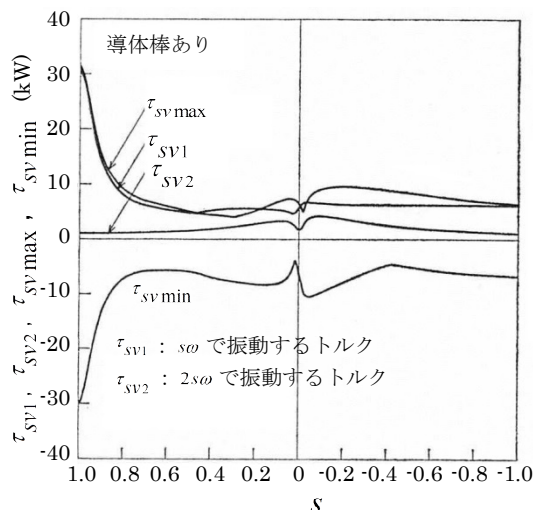


図4 極間に導体棒を有する供試機の
振動性トルク特性

図4において、滑り周波数で振動するトルク成分 τ_{sv1} は直流励磁と電機子巻線への正相電圧とによるトルクで、それらのトルク成分は第1振動性トルクと第2振動

トルクとに分けられ、第1振動性トルクは滑り0において同期性トルクとなる⁽⁶⁾。本供試機の場合、 τ_{sv1} は滑り1で最大値となり、定格3.7kWに対して約9倍の振幅になることがわかり、電動機や負荷に多大な影響を及ぼすことは想像に難くない。特に本機のように同期時の最大トルクが非同期時の最大トルクより大きい場合(図2を参照)は同期外れを起こすとただちに停止してしまうので、すみやかに電源を遮断することは言うまでもない。

滑り周波数の2倍で振動する成分 τ_{sv2} は電機子正相電圧のみを供給している場合に発生する振動性トルクで、この場合電機子電流には基本周波数 $f(\text{Hz})$ と突極性に基づく周波数 $(2s-1)f(\text{Hz})$ が存在し、制動巻線と界磁巻線の電流には $sf(\text{Hz})$ の周波数が存在する。これらの周波数によって $2sf$ の振動性トルク成分が発生することになる^{(13),(16)}。これらの成分の中にも第1振動性トルク成分があり、滑り0で同期性トルクとなる。

以上のように振動性トルクには sf 成分と $2sf$ 成分があり、滑り0の同期時には第1振動性トルク成分が同期性トルクとなる。また、 sf で振動するトルク成分は同期時、 $\sin \delta$ (δ : 負荷角)で変化する成分に、 $2sf$ で振動するトルク成分は $\sin 2\delta$ で変化する成分にそれぞれなる⁽¹⁶⁾。

4. 分相形单相誘導電動機の解析例

テンソル解析を用いた理論展開は誘導電動機に対しても行われおり、筆者の一人である坪井らが投稿した文献⁽¹⁸⁾が挙げられる。

この論文は前述の同期機と理論展開の手順は同一であるが、固定子巻線は二相で不平衡となり、回転子は平衡二相巻線となっている。

このため、同期機の例では電圧は三相平衡電圧でかつ、巻線も対称三相巻線なので、固定子には正相電圧のみが存在したが、分相形が不平衡二相になるため固定子には正相電圧と逆相電圧が存在することになり、平衡三相機より理論展開が煩雑となる。しかし、回転子は平衡になるので、突極機よりは若干平易になると言える。

4.1 過渡インピーダンステンソル

図5は分相形单相誘導機の解析モデル図⁽¹⁸⁾を示しており、図中 d_s および q_s は不平衡二相固定子巻線の主巻線および分相巻線、 a および b は平衡二相回転子巻線、 θ は d_s 巻線の中心軸と a 相回転子巻線の中心軸とのなす角度(電気角)、 Z_d および Z_q は d_s および q_s 巻線の外部にそう入する外部インピーダンスを表している。

図5より、過渡インピーダンステンソルを求めるため、以下の手順で解析を進める。

相軸上での過渡インピーダンステンソルは d_s および q_s 巻線の外部インピーダンスをそう入しない場合とし

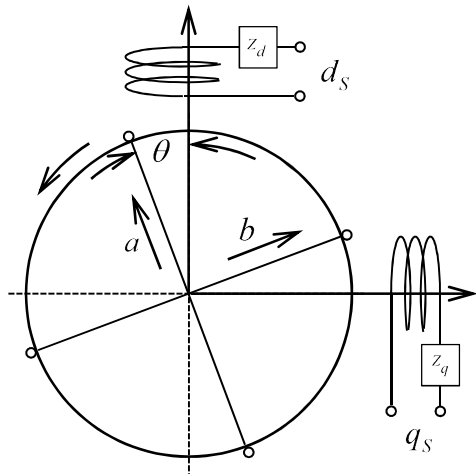


図5 分相形単相誘導機の解析モデル図

て算出し、そのインピーダンステンソルを対称軸上に変換し、過渡インピーダンステンソルを求める。

外部インピーダンスは外部インピーダンス単独で相軸上でのインピーダンステンソルを求め、同様に対称軸上に変換する。

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c|cccc} & 1f & 1b & 2f & 2b \\ \hline d_s & 1 & 1 & & \\ q_s & j\beta & -j\beta & & \\ a & & & 1 & 1 \\ b & & & j & -j \end{array} \quad (10)$$

最後にそれらを合算して対称軸上での過渡インピーダンステンソルが求められる。

座標変換については、固定子巻線については二相巻線対称軸へ、回転子は普通の対称軸へ変換することができ、合算した変換行列は文献(18)を参照して(10)式のように示される。

$$[Z] = \begin{array}{c|cccc} & 1f & 1b & 2f & 2b \\ \hline 1f & R_s + L_s p + (Z_d + \beta^2 Z_q) / 2 & R_D + (Z_d - \beta^2 Z_q) / 2 & M_{sr} p e^{j\theta} & \\ 1b & R_D + (Z_d - \beta^2 Z_q) / 2 & R_s + L_s p + (Z_d + \beta^2 Z_q) / 2 & & M_{sr} p e^{-j\theta} \\ 2f & M_{sr} p e^{-j\theta} & & R_r + L_r p & \\ 2b & & M_{sr} p e^{j\theta} & & R_r + L_r p \end{array} \quad (11)$$

ここで、定数および定数の定義を下記とすれば、外部インピーダンスを含めた対称軸上での過渡インピーダンステンソルは(11)式となる⁽¹⁸⁾。

R_{ds} および R_{qs} : d_s および q_s 巻線の抵抗, L_{ds} および L_{qs} : d_s および q_s 巻線の自己インダクタンス, R_r および L_r : a または b 巻線の抵抗および自己インダクタンス, M_d および M_q : d_s および q_s 巻線と a または b 巻線の巻線軸が一致したときの相互インダクタンス

p : 時間に関する微分オペレータ

$$L_s = L_{ds} = \beta^2 L_{qs}, \quad R_s = (R_{ds} + \beta^2 R_{qs}) / 2$$

$$M_{sr} = M_d = \beta M_q, \quad R_D = (R_{ds} - \beta^2 R_{qs}) / 2$$

4.2 定常状態における電圧、電流テンソル

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{SI} \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cc} 1f & \frac{1}{2} V_{1fm} e^{j(\omega t + \phi - \alpha)} + \frac{1}{2} V_{1bm} e^{-j(\omega t + \phi + \alpha)} \\ \hline 1b & \frac{1}{2} V_{1bm} e^{j(\omega t + \phi + \alpha)} + \frac{1}{2} V_{1fm} e^{-j(\omega t + \phi - \alpha)} \end{array} \quad (12)$$

d_s および q_s 巻線への固定子供給電圧は(7)式と同一となり、これを(10)式の固定子の巻線軸のみを参照して巻線対称軸に変換すると(12)式になる。

なお、電圧の記号は(9)式との混同を避けるため、文献(18)とは異なるので注意していただきたい。(添え字の I は Induction の頭文字である。また複素数のため・を付記した。)

ただし、

$$1 + j\beta = k e^{j\alpha}, \quad 1 - j\beta = k e^{-j\alpha}$$

$$V_{1fm} / 2 = V_{1bm} / 2 = k V_m / 2\sqrt{2}$$

とおく。

電流の算出については3章では割愛したので、ここで

	1f	1b	2f	2b
1f	$\frac{1}{2} V_{1fm} e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$	$R_s + jX_s$ $+(\dot{Z}_d + \beta^2 \dot{Z}_q) / 2$	R_D $+(\dot{Z}_d - \beta^2 \dot{Z}_q) / 2$	jX_{msr} $\times e^{j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$
1b		R_D $+(\dot{Z}_d - \beta^2 \dot{Z}_q) / 2$	$R_s + jX_s$ $+(\dot{Z}_d + \beta^2 \dot{Z}_q) / 2$	jX_{msr} $\times e^{-j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$
2f		$j s X_{msr}$ $\times e^{-j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$		$R_r + j s X_r$
2b			$j(2-s)X_{msr}$ $\times e^{j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$	R_r $+ j(2-s)X_r$

$$=$$

	1f	1b	2f	2b
1f	$\frac{1}{2} \dot{I}_1^{1fm'} e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$			
1b		$\frac{1}{2} \dot{I}_1^{1bm'} e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$		
2f			$\frac{1}{2} \dot{I}_s^{2fm'} e^{j(s\omega t - \overline{\psi} - \varphi + \alpha)}$	
2b				$\frac{1}{2} \dot{I}_{2-s}^{2bm'} e^{j(\overline{2-s}\omega t + \overline{\psi} + \varphi - \alpha)}$

----- (12)

は簡単に述べておく。

電圧は(12)式のように4成分からなるので、それぞれ別々に電流を求めてから合算することにより、電流の一般式が導出される。

具体的にはまず、1f軸上に $(V_{1fm} / 2) e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ を印加し、電流を求めると(12)式のようになる。

次に 1b 軸上に $(V_{1fm} / 2) e^{-j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ を印加し電流を求めるが、「fおよびb, jおよび-jについて共役な式」なる関係があるため、比較的分かり易い式になっている。

1f軸上に $(V_{1fm} / 2) e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ を印加した場合の1f軸の電流は $(\dot{I}_1^{1fm'} / 2) e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ となり、1b軸上に $(V_{1fm} / 2) e^{-j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ を印加した場合の1f軸の電流は上記の関係を適用すると $(\dot{I}_1^{1bm'*} / 2) e^{-j(\omega t + \varphi - \alpha)}$ となる。

逆相分電圧は1b軸上に $(V_{1bm} / 2) e^{j(\omega t + \varphi + \alpha)}$ を印加し、さらに1f軸上に $(V_{1bm} / 2) e^{-j(\omega t + \varphi + \alpha)}$ を印加し、それぞれ電流を求める。

以上により算出された電流を合算すると電流の一般式が導出され、(13)式のようになる。

4.3 トルクの一般式

前章では紙面都合でトルクの導出は割愛したが、本章ではその導出について触れておく。

トルクは導出された電流の一般式と同期ワットトルクテンソル $[\omega G_{ss}]$ より、(14)式から求める。

$$\tau_s = [i_s]_t^* [\omega G_{ss}] [i_s] \quad \text{----- (14)}$$

$$[\omega G_{ss}] =$$

	1f	1b	2f	2b
1f			jX_{msr} $\times e^{j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$	
1b				$-jX_{msr}$ $\times e^{-j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$
2f	$-jX_{msr}$ $\times e^{-j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$			
2b		jX_{msr} $\times e^{j(\overline{1-s}\omega t + \psi)}$		

$$\text{----- (15)}$$

$$[i_s] =$$

1f	$\frac{1}{2} \dot{I}_1^{1fm'} e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1bm'*} e^{-j(\omega t + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1fm''} e^{j(\omega t + \varphi + \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1bm''*} e^{-j(\omega t + \varphi + \alpha)}$
1b	$\frac{1}{2} \dot{I}_1^{1bm'} e^{j(\omega t + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1fm'*} e^{-j(\omega t + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1bm''} e^{j(\omega t + \varphi + \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_1^{1fm''*} e^{-j(\omega t + \varphi + \alpha)}$
2f	$\frac{1}{2} \dot{I}_s^{2fm'} e^{j(s\omega t - \overline{\psi} - \varphi + \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_{2-s}^{2bm'*} e^{-j(\overline{2-s}\omega t + \overline{\psi} + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_s^{2fm''} e^{j(s\omega t - \overline{\psi} - \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_{2-s}^{2bm''*} e^{-j(\overline{2-s}\omega t + \overline{\psi} + \varphi - \alpha)}$
2b	$\frac{1}{2} \dot{I}_{2-s}^{2bm'} e^{j(\overline{2-s}\omega t + \overline{\psi} + \varphi - \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_s^{2fm'*} e^{-j(s\omega t - \overline{\psi} - \varphi + \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_{2-s}^{2bm''} e^{j(\overline{2-s}\omega t + \overline{\psi} + \varphi + \alpha)} + \frac{1}{2} \dot{I}_s^{2fm''*} e^{-j(s\omega t - \overline{\psi} - \varphi - \alpha)}$

----- (13)

ここで、 $[\omega G_{SS}]$ は(15)式である。
したがって、(13)式および(15)式を(14)式に代入して、トルクの一般式は(16)式となり、そのトルク成分は表 3 のようになる⁽¹⁸⁾。

$$\tau_s = (\dot{\tau}_{s1} + \dot{\tau}_{s1}^*) + (\dot{\tau}_{s2} + \dot{\tau}_{s2}^*) + \dots + (\dot{\tau}_{s16} + \dot{\tau}_{s16}^*) \quad \text{-----}(16)$$

表 3 のトルクの種類において、第三振動性トルクがあ

表 3 トルクの各成分

	トルクの式	トルクの種類
$\dot{\tau}_{s1}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr}$	非同期性正相トルク
$\dot{\tau}_{s2}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{-2j(\omega t + \varphi - \alpha)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s3}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{2j(\omega t + \varphi - \alpha)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s4}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr}$	非同期性逆相トルク
$\dot{\tau}_{s5}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr}$	非同期性正相トルク
$\dot{\tau}_{s6}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{-2j(\omega t + \varphi + \alpha)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s7}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{2j(\omega t + \varphi + \alpha)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s8}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr}$	非同期性逆相トルク
$\dot{\tau}_{s9}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{j2\alpha}$	非同期性正相トルク
$\dot{\tau}_{s10}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{-2j(\omega t + \varphi)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s11}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{2j(\omega t + \varphi)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s12}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{-j2\alpha}$	非同期性逆相トルク
$\dot{\tau}_{s13}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{-j2\alpha}$	非同期性正相トルク
$\dot{\tau}_{s14}$	$\frac{1}{4} i_1^{1fm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{-2j(\omega t + \varphi)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s15}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_s^{2fm'} jX_{msr} e^{2j(\omega t + \varphi)}$	第三振動性トルク
$\dot{\tau}_{s16}$	$\frac{1}{4} i_1^{1bm^*} i_{2-s}^{2bm^*} jX_{msr} e^{j2\alpha}$	非同期性逆相トルク

るが、このトルクは滑りのいかに拘らず振動周期が一定なトルクで、ある特定の滑りでその振幅が零になるという成分である⁽⁶⁾。

以上、分相形单相誘導機のトルクの成分の導出まで概略を述べてきたが、この理論展開は波形ひずみを持つ電源がコンデンサ電動機に適用した場合の特性算定にも応用されているので、参照されたい⁽¹⁹⁾。

5. あとがき

以上のように、テンソル解析を用いて、同期機と誘導機の特性算定のための理論展開を紹介してきたが、紙面の都合で割愛した自己始動形三相永久磁石同期電動機の解析⁽²⁰⁾にも本解析が応用されており、さらには单相永久磁石形同期電動機にも拡大しているところである。

本解析の特徴は解析モデルから出発して、インピーダンスを算出し、最終的には電流の一般式とトルクの一般式から振動しないトルク成分とある振動周期で振動するトルク成分が整然と導出されることであり、昨今の低振動、低騒音への取り組みに対して、何等かの助けになるものと期待している次第である。

また、電流についても言うまでもなく、各電流成分の周波数も整然と導き出される。

このテンソル解析を用いた研究は、本学では 50 年以上の歴史があり、現在でも回転機の解析手段としておおいに活用しており、今後とも研究の要として利用拡大を図っていき、回転機技術の向上に貢献していきたいと考える。

本論文に関わる研究はこれまで多数の卒研究生や院生らによって脈々と引き継がれてきた成果であり、紙面をお借りして暑く御礼申し上げる次第であり、引き続き関係各位のご指導、ご鞭撻を賜りたいと考える。

参考文献

- (1) G. Kron : "The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery" General Electric Review, 38, 4 ~ 41, 10 (1935-4~1938-10)
- (2) 片岡昭雄, 西方正司 : 「回転機のテンソル解析法」電気学会雑誌, 97, 8, P.694 (昭 52 年 8 月)
- (3) 尾本義一, 天池邦弘 : 「非対称固定子巻線誘導電動機の解析と巻線対称軸に就いて」電気工学論文集, 2, 1, P.47, (昭 25 年 6 月)
- (4) 尾本義一, 天池邦弘 : 「非対称誘導電動機の解析とその等価回路」電気工学論文集, 4, 1, P.9, (昭 27 年 1 月)
- (5) 加藤邦弘 : 「テンソル法に対する空間的高調波の導入と多相反動電気機械に於ける高調波トルクについて」電気工学論文集, 4, 3, P.151, (昭 27 年 5 月)

- (6) 加藤邦弘：「電磁機器に於けるトルクの種類の一例」電気工学論文集，4，4，P.185，（昭27年7月）
- (7) 加藤邦弘：「非同期速度に於ける多相反動電気機械の特性について」電気工学論文集，4，4，P.225，（昭27年7月）
- (8) 加藤邦弘：「逆相分電流移相器について」電気工学論文集，4，5，P.271，（昭27年9月）
- (9) 加藤邦弘：「非同期速度における制動巻線付多相反動電気機械の特性と構造対称軸について」電気工学論文集，4，5，P.281，（昭27年9月）
- (10) 加藤邦弘：「非同期速度における単相反動電気機械の特性について」電気工学論文集，4，5，P.288，（昭27年9月）
- (11) 加藤邦弘：「二相巻線対称分応動装置とその試作及び応用」電気工学論文集，4，5，P.296，（昭27年9月）
- (12) 加藤邦弘，矢野隆，保志和吉：「等価回路による二重かご形多相誘導電動機の特性算定の一方法」電気学会雑誌，73，780，P.990，（昭28年9月）
- (13) 加藤邦弘：「制動巻線付凸極多相同期機の解析の一方法」電気学会雑誌，73，783，P.1380，（昭28年12月）
- (14) 加藤邦弘：「制動巻線付凸極多相同期機の等価回路について」電気学会雑誌，74，785，P.134，（昭29年2月）
- (15) 加藤邦弘，坪井和男：「制動巻線付突極多相同期機の定数決定法および非同期始動特性算定法」電気学会雑誌，91，4，P.681，（昭46年4月）
- (16) 中村雅憲：「脱調時における同期機の電流およびトルク特性」電学論，99B，4，P.260，（昭54年4月）
- (17) 坪井和男，中村雅憲：「極間導体棒のそう入による黄銅製制動巻線付突極同期電動機の始動諸特性の改善」，中部工業大学紀要，13，A，P.33，（昭52年12月）
- (18) 加藤邦弘，坪井和男：「分相形単相誘導電動機の解析の一方法」電学論，93B，2，P.60，（昭48年2月）
- (19) 野中作太郎，坪井和男：「電源電圧の波形ひずみがコンデンサ電動機の特性に及ぼす影響」電学論，97B，3，P.135，（昭52年3月）
- (20) 坪井和男，竹上恒雄，廣塚功，中村雅憲：「自己始動形三相永久磁石同期電動機の一般解析法」電学論，131D，5，P.692，（平23年5月）