

中部大学における数学教育の課題

渕 野 昌

1 はじめに

大上段に構えた印象を与える表題になってしまったかもしれないが、本稿では、現在中部大学理学教室で行なっている主に工学部の数学教育に関連して、我々が直面している、あるいは近い将来に直面するにいたることが予想される課題について考察してみたいと思う。したがって、以下に述べることは主に中部大学の現状を念頭に置いたものとなっている。しかし、大筋では日本の多くの大学での数学基礎教育の置かれた状況にあてはまるものであろうし、日本での文脈を離れても、大学での非専門科目としての数学教育一般に共通する課題の議論を含むものとなっているであろうと思う。

教養科目としての数学教育は、次の第2章と第3章で述べることになる、互いに相反する対応を要求しているように思われるふたつの課題に直面していると言えそうである。

2 教授内容の改変の必要性について

情報化などによる、最近の社会的、技術的な環境の急激な変化を鑑みると、これからの大学における数学基礎教育では、従来行ってきたものとは質的に大きく異なるスタイルや内容が求められるようになることは必須であろう。ある意味では、現行の教育内容と講義すべき理想的な教育内容の間の乖離は既にかなり大きなものになっていると言えるように

も思われる。

現在、中部大学工学部では「微分積分学Ⅰ」、「微分積分学Ⅱ」、「線形代数学Ⅰ」、「線形代数学Ⅱ」が教養の数学のミニマル・セットとなっており、「微分積分学Ⅰ」の前提としている予備知識の十分でない学生のために「基礎数学」が「微分積分学Ⅰ」を受講する前の準備コースとして用意されている。

これらの教科書では理学教室の作成した教科書[1]、[2]、[3]が用いられているが、その内容の範囲やスタイルは、旧来の工学部系の数学の講義で用いられているものに準ずるものと言える。実際、これらの教科書の執筆の目的は、新しいカリキュラムを開発する、ということではなく、現行の数学基礎教育の内容を中部大学の学生の学力にあわせて効率よく教えるための教材作成にあったと思われる。これらの教科書と類似の目的や難易度のために日本語で書かれた市販の教科書も多数あるが、それらはほとんどすべて、内容の範囲や記述のスタイルに関し大同小異と言えそうで、既に40年以上前に存在していた日本語で書かれた古い数学の教科書の内容や記述スタイルを引きずっているように思える。

このような理学系でない学生向けに書かれた教科書に共通するのは、19世紀以前の数学のスタイルと20世紀以降の数学のスタイルの折衷、および、計算中心の内容であろう。

スタイルの折衷という点に関しては、数学

が実際に応用される“現場”では、たとえば関数の概念がまだ確立していなかった時代の、アルカイックな数学記述のスタイルが用いられることも少なくないため、学生にモダンな記述法による数学のみを教えることが必ずしも教育的であるとは言えない、という事情もあるかもしれない。ちなみに、筆者は1984年に西独ハノーバー大学の工学部で微積の講義の演習を担当した経験があるが、ここで使われていた教材も、日本での微積の教科書と同様の古色蒼然としたものであった。

一方計算中心という点に関しては、そのことにひきずられて、証明と説明の差が明示されていなかったり、証明と称する説明のつじつまが合ってなかったり、一般的な定理として教科書に述べられている命題の記述と計算例の間にスタイルの整合性がとられていない、というような問題点を露呈してしまう教科書も少なくないようである。

線型代数の教科書では計算中心というスタイルに固執すると、手計算のできる例の範囲から出にくくなるため、たとえば変数の個数の大きな連立方程式で記述されるような応用問題や、線型最適法やコンピュータ・グラフィックスへの応用に関するトピックスなど線型代数の現代的な応用例を教科書に盛り込むことが難しくなってしまうという結果を招くことにもなりかねない。

微分積分学と線型代数という教科の二分化もいくつかの問題を孕んでいるように思える。微分積分学で扱われるトピックスのうちには、線型代数との関連で見たときにはじめて本当に理解できる内容のものも少なくない。たとえば、「微分積分学Ⅱ」の内容やその延長線上で扱うことのできるベクトル解析の範囲からの例で言うと、(偏)微分が各点におけ

るアファイン写像による関数の近似を与えるものとなっているという理解があれば、色々なレベルで学生がつまずくことの多い合成関数の微分法が、「合成関数のアファイン近似が、合成される各々の関数のアファイン近似の合成になっている」という事実として統一的に認識できることになり、すっきりとした理解が可能になるであろう。

しかし、微分積分学と線型代数が別々に教えられている現状では、両方の教科間のこのような連携をとることは難しい。

線形代数学の講義内容の微分方程式やフーリエ解析の講義との連携を考えたときには、線型代数を有限次元関数解析という視点から教えるということも考えられる。実際に、このような方針のもとに書かれた日本語の教科書もいくつか存在するが、これを工学部の学生向きの講義としてアレンジするのはかなり難しいかもしれない。

上で「計算中心」と書いたが、そこでの「計算」とは、旧来の手計算で行なう数式処理のことであった。一方、現在では、かなりの規模の数式処理や数値計算を行なうことのできるソフトウェアがPC上で利用可能である。そのようなもので日本でよく知られているものにはMathematicaがあるが、教育研究用の無償のソフトウェアもいくつも存在する(たとえば、[4]、[5]などを参照)。

現在、電卓の普及で、整数の四則計算を珠算で行なうことの計算としてのメリットはほとんどなくなっており、珠算の意味はむしろ一種のスポーツとしてのそれではないかと思う。たとえばチェスでは、Deep Blueのような世界チャンピオンと互格に戦えるようなコンピュータ・プログラムさえ存在するが、それでも、人間がそのスポー

ツにチャレンジすることの意味はゼロにはならないであろう。珠算のステータスもそれと同様なのではないだろうか。

同じように考えると現行の大学での数学の基礎教育における数式計算も、基礎的な理解を深めるための例としての一部を除くと、スポーツとしての意味しか持ち得なくなっていると言えそうである。

コンピュータを用いた数式処理や数値計算が手軽にできるようになってきている現状における実用性を考えると、コンピュータ上の数式処理や数値計算を活用しながら問題解決を行なうときに必要となる基礎知識に関連した内容に重点をおいた教程がより大きな意味を持ってくるものと思われる。

この場合、数値計算法の初歩や誤差評価に関する基礎知識など、現行の数学基礎教育のカリキュラムには全く含まれていないようなテーマを扱う必要が出てくるであろう。

3 学生の平均的数学能力に起因する制限

第2章では、「何を教えるべきか」、という観点から議論したが、実際には、「理解力が限られているため、あまり多くのことを消化できない」という学生側に由来する制約のため、実現可能なカリキュラムの変更は非常に限られたものになってしまう、というのが現状であろう。

「工学系の学生は一般に抽象的な思考能力に障害があるから」というのが、工学部で ε - δ 論法を用いた厳密な微分積分の理論展開を教えないことの標準的なエクスキューズであるが、残念ながら、これは学生の実状を反映しているように思える。また、前章で「計算中心」と書いたが、実は、“計算中心主義”は

むしろ学生の側の意識に非常に根強く存在している、と言えそうである。実際、講義で理解の助けになると思われる説明をどんなに工夫しても、学生の大半は理論的な説明は無視して、演習問題をやらせたときに、自己流に、しかも間違っていたり、問題のあるやり方で、解いてしまう、という現象がどのクラスでも見られる。

例として、筆者の微分積分学Ⅰのクラスで実際に起った最近の状況を見てみることにする。講義の中で、合成関数の微分法の復習をして、

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

という式が黒板に残っている状態で、演習問題を学生にやってもらったときのことである。

演習問題には、(1) $a \cos(\omega t + \theta)$ の導関数を求める、というものと、(2) $a\sqrt{\sin 2x}$ の導関数を求める、というものが含まれていた。三角関数や $x^{\frac{1}{2}}$ の微分はその講義でやったばかりだったので、2つの課題とも上の合成関数の微分法の直接的な応用でしかないはずであるのだが、非常に多くの学生が(1)は問題なく計算できたのに、(2)では全く何をしたいのか分からない、という状況に陥ってしまった。

これは、これらの学生が、(1)と(2)を合成関数の微分というパターンで把握することができず — ついでに言えば、演習の前に講義の中で復習をしたときの私の説明も理解できていず — (1)については前に(高校のときに?)パターンを丸暗記していたためできたが、(2)については対応するパターンを暗記していなかった、ということであろう。

このため、この授業の演習では筆者は教室を回って個別に説明したりヒントを与えたりすることになった。個別に説明した場合には

各々の学生の理解に合わせた対応ができる分だけ、たとえばここでの例での問題なら合成関数の微分法の理解をうながしやすく、この授業の時には幾分かはそのような効果もあがっているという感蝕もあったが、次回、別の関数の組合せに対して同様の演習問題を出したときに全く同じことが起こらないという保証もないようにも思える。

もうひとつの例として、2004 年春学期に実施した、これも微分積分学 I の期末試験の試験の一部について述べてみたい（科目は前の例と同じであるがクラスは異なる）。試験問題は、次のような穴埋めである。四角く囲った単語や式が問題用紙では空白になっており、そこに適当な単語や式を書き込むこと、というのが問題である：

関数 $f(x)$ が $F(x)$ の 導関数 のとき、
 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるという。
 このとき $\int f(x) dx = \text{} F(x) + C \text{}$ と書く。
 $\int f(x) dx$ は $f(x)$ の 不定積分 と呼ばれる。
微分積分学 の基本定理により、
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) + \text{} F(a) \text{}$ である。

積分に関する基本中の基本に関する設問であるし、類題を試験の予行演習でも出しているので、満点が続出してもおかしくないはずであるが、結果を見ると、

点数	人数
全問正解	1
ほぼ全問正解	15
約半分正解	31
ほとんど 0 点	6

という非常に低い成績となった。しかも、この問題での得点と、計算問題での得点との間の相関が非常に低いことにも驚かされた。こ

れは微積の計算のこなせている学生についても、ノンバーバルに意味を考えず（分らずに）計算している者が多いことを示唆しているし、逆に、意味は判っている、計算力の不足のために具体的な計算ができないでいる学生の存在も示唆するものである。

上のような例を見ると、大学レベルと言える数学の基礎教育のそもそも成立の可能性についてさえ悲観的な気分にならざるを得ない。しかし、学生に学習意欲が全く欠落しているわけではなく、講義中に行なっている演習でも積極的に質問をする学生も少なくないという点は十分に留意すべきであろう。

このような現状への対応策としては、現行のシステムの下では、講師一人一人の裁量を最大限に生かしてゆく、というようなことしかなさそうに思える。ただし、難易度別のクラス編成のさらなる工夫や、各クラスの少人数化は緊急の課題であろう。

4 まとめ

第 2 章でも論じたように、数学の基礎教育は、その教育内容について、大きな変革が必要とされていると言えそうである。計算機による支援の可能性から、複雑な数式処理を手計算でこなす必要性はますます低くなることが予想されるが、これは、その分、数学の個々の手法の意味や理論体系の全体的な理解、応用における有効性の吟味、などといった、今までの数学教育でうまく対応しきれていなかったように思える事項に関する教育のウェイトをもっと大きくできる、という可能性も意味しているであろう。また、このような状況に対応するためには、以上で述べたような諸点に関する教育法の改善や工夫も重要な課題となってくるであろう。

一方、現行の数学の基礎教育のコースを受講している学生のうち、これらのコースで教えられる数学の理解ということに関して大きな問題をかかえている者が非常に多いことは、第3章で述べた例からも歴然である。

学生のなかには、日本語能力に問題があり、講義形式で説明されたものを十分にノートにとれなかったり、ノートを復習して理解を補うといった作業をする能力にかけていたりする者が少なくないようである。これが大学生の年齢になってから改善できる能力であるかどうかは疑問であるが、このことに対する何らかの対策も必要であろう。

しかし、数学教育の側からは、このような問題をかかえる学生に対しては、個別指導に近い指導形式によって学生の理解の向上をうながすほかに、その意味で、クラス的能力や理解度による細分化や、各クラスの少人数化はぜひとも必要と思う。いずれにしても現状としては講師一人一人の指導能力や持ち味を最大限に生かすことで対応するしかなく、そのためには現行の講義の枠組の柔軟な運用も常に必要であろう。

今年から発足した学習相談室の制度は、学生が授業外で個人指導を受ける機会を作るものであり、これがよりうまく機能すれば、この枠組でのきめこまかな指導が、講義での指導の補足として、教科の理解に問題のある学生にとっても、逆に講義内容にあきたらずも

っと高度な内容の指導を受けたい、と思う学生にとっても、状況改善につながるのではないかと期待するものである。

第3章でも見たように、ある種の計算パターンをまる暗記させることによる見かけ上の教育効果が、学生が本質的な理解を深めることに全くつながっていない、という現象が、大学までの学校教育での、負の「教育効果」として、累積した形でも現われているのではないかと恐れる。一定数の学生を試験に通すだけの見かけの成果にとどまらず、数学の教科の授業を通じて、理学的、また工学的な意味での、より深い理解をうながし、それが個々の学生の知的応用力の向上にもつながるような、本物の数学基礎教育を志したいものである。

参考文献

- [1] 中部大学数学教室編、微分積分学、学術図書出版社(2003)。
- [2] 手嶋忠之、奥村吉孝著、中部大学数学教室編、線形代数学、学術図書出版社(2002)。
- [3] 中部大学数学教室編、基礎数学、学術図書出版社(2001)。
- [4] 赤間世紀、山口喜博、MuPAD で学ぶ基礎数学、丸善株式会社(2004)。
- [5] 櫻井鉄也、Mathlab/Scilab で理解する数値計算、東大出版会(2003)。

(教授 工学部 理学教室)