

教養科目（自然と環境）の中の数学

千 谷 慧 子

1 はじめに

最近学生の数学離れ、理科離れが問題になっている。科学技術の発展によって社会が益々大きく変わりつつある今、若い人々が数学や理科を敬遠するのは深刻な問題である。一般に勉強は、好奇心や知識欲に誘われて、主体的にやるのが本来の姿なのに、勉強は試験のためにする、しかも手っ取り早く暗記して間に合わせるというのは意味が無い。

数学が自然科学はもとより、科学一般に言語として深く関わっている以上、これを避けていては不自由である。といって学生を試験で追い立ててみても余り効果がないのではない。試験のために暗記する勉強方法は面白くないばかりでなく、問題解決の力にならない。好奇心や知識欲、競争心などが原動力となって勉強するうちに知識が身につく、同時に考える能力が訓練され、さらに勉強しようという主体的な意欲と好奇心が湧いてくる。そのとき数学が面白いと実感するだろう。知識そのものも必要であるが、知識を獲得する過程で考える力が育っていくことの方がもっと大切であろう。その意味で、直接役に立たない数学も、受身では育たない思考力を養うという一面がある。

教養科目の数学は全学対象であり、受講生には、高等学校で数学を履修した学生もいなかった学生もあり、基礎知識にも関心にもばらつきが大きい。一方、社会の状況を考えると、教養としての数学の重要性は益々大きくなっている。この中で教養科目の数学の講義をどのようにしたらよいか、悩みながら行った平成12年度、13年度の授業作りについて報告する。

2 教養数学の目標

私は教養数学の目標として「知識の習得」ではなく、「概念構成の習得」ということを第一に考えている。いろいろな事物について、個々の性質に共通な特徴を抽象し、本質的な特徴を概念として取り込むことによって、人は物事をはっきりと認識し、客観的に判断することができるようになる。

例えば原始の時代、数は1, 2, 3までで、4以上はひとまとめに「たくさん」であったという。3というのは3本の木の集まり、3個のりんごの集まりなど具体的な対象に共通な抽象概念である。3という数の概念を得たとき、人は初めて3本の木の集まりを認識し、表現することができる。さらに新しく木を一本加える、もう1個りんごを追加するという行為に共通な「1を加える」という「操作」の概念があると、3という抽象概念から「1を加える」という操作によって4、さらに5という風に自然数1, 2, 3, 4, …の

概念がつぎつぎにできてくる。いったん自然数の概念ができると、自然数があたかも具体的な対象のように感じる。実際最終的には具体的な対象として扱えるようになり、目の前にある指や木やりんごを持ち出すことなしに、数の足し算、掛け算、大小関係などの新しい概念を習得することへと発展することができる。こうして単純な概念から新しい概念をつぎつぎに生産して大きく発展した概念の体系は、複雑な現象を認識し、表現する思考の枠組みとなり、状況を理解したり物を考えたりする基盤になる。いいかえると、概念の体系をもつことは言語をもつことである。単なる知識として記憶することと、自分の中の概念の体系を豊かにしてゆくことは別のことである。

数学は自然科学の言語であり、概念の体系である。科学技術は勿論、あらゆる文化は、いろいろな概念の蓄積の上に成り立っている。したがって自分の中の概念の体系を大きく発展させることは、我々をとりまく世界を認識するための言語を豊かにすることであり、文系理系を問わず、豊かな文化を享受するためには必要なことであろう。

それではより豊かな概念の蓄積はどうやって獲得されるのか。小さい子供が数に関心を持ち始めると、数を唱えることでは満足せずに、具体的な対象と抽象概念の間を行き来して、熱心に概念の構築に取り組む。これは人間にプログラムされた本能なのであろう。

不思議だとか、美しい、納得したという感動が原動力になって、より高い概念を得るための努力をし、納得し、それを記憶にとどめ、さらに深い感動を得るという風に、順に概念が積み重ねられ、蓄積されるのだと思う。このことを前提に、豊かな文化を享受するための‘概念構成’を教養数学の目標として授業作りを考えている。

3 現状

大学に来る多くの学生が子供のときから試験に迫られ、試験の点を取るための勉強で疲れてしまったのか、大学に入ったときには数学が嫌いだという。感動するという原動力があればこそ、数学の厳しい訓練も楽しむことができるが、理解できないときは感動もなにもない。試験に迫られて勉強するだけでは無味乾燥で嫌いになるのも無理はない。数学は興味をもって主体的に勉強しなければ身につかない。まず本来の好奇心を取り戻し、主体的に勉強しようという意欲を盛り立てるのが課題である。

4 授業の実態

4.1 「数学の考え方」

平成12、13年度前期には、教養科目の中の「数学の考え方」を担当した。教養科目の目標から、数学の内容より考え方、学生自身が数学的な概念の発展を経験することに重点をおき、学生がゆっくり時間をかけて考えられるよう、一学期間に2題のみ、身近な問題を解くことに集中することにした。1題は線形代数の問題、もう1題は微積分に関する問題である。線形代数と微分積分は、最も応用範囲が広く、よく整備された分野

である。文科系の学生も履修する科目であるから、線形代数や微積分の知識は仮定できない。

平成12年度の前期には、次の2問題を解いた。問題1は『大学での数学の教え方いろいろ』（日本数学会大学数学基礎教育WG教授法研究班）の中の論文「大規模クラスにおける授業の工夫」（木村良夫氏）の課題の例である。

〔問題1〕都市と農村だけの小さな国がある。人口は合わせて100万人で、変化はない。

ここで、つぎのような人口移動が毎年起こると遠い将来の人口の分布はどうなるか。

前年度の都市人口の8%は農村に移動する。

前年度の農村人口の12%は都市に移動する。

〔問題2〕船を運航させるのに必要な燃料の単位時間あたりの量は、水面に対する速さの3乗に比例するという。流速 c の川を、流れにさからって一定距離を運航するとき、最も経済的な船の水面に対する速さを求めよ。

問題1には6週間かけた（1週間1コマ）。クラスをいくつかのグループに分け、それぞれ違った最初の人口分布から初めて、2年目、3年目、4年目、5年目の人口分布を計算し、グラフにして、そこから予想をたててもらった。2講目から文章を数学の言葉に翻訳する作業をした。連立方程式を立てて計算してもらった。2年目、3年目となるとだんだん複雑な計算になってうんざりしているようであったが、計算結果を提出することにしたので、学生は一生懸命計算していた。自分で手を動かして計算しているときは集中している。計算しながら、これでは6年目、7年目、… の計算は大変でとてもできない、それではどうしたらよいかと考えを巡らすことを期待する。この時点でベクトルや行列の概念をとりいれて問題を式で表現できることを説明した。ベクトルや行列の概念が定着するには時間がかかるので、ここで一服してベクトルや行列の小さい演習問題を出して計算練習をした。問題を解くにあたって、行列の固有値を求め対角化する方法を紹介した。固有値や対角化の概念を理解するのにはさらに時間がかかる。毎回少しずつ自分で計算し、提出してもらった。そして結論まで到達したとき、その解答をまとめて、自分の言葉で説明をつけるというレポートの課題を出した。感想も書いてもらった。どんな人口分布からスタートしても遠い将来には同じ分布（都市60万人、農村40万人）になるという結果に驚いた学生が少なくなかった。難しいという文句も多少あったが、大半の学生が何とか解答にたどりついた喜びを味わったようで、ほっとした。以下のような感想が多かった。

〔学生の感想〕

- (1) 都市の人口と農村の人口で行列を使うというのは意外であり、結構感動しました。
- (2) 数学は考え方を少し変えると、いろいろな使い道があることが分かりました。
- (3) とても難しくそうにみえた問題だったけど、細かく分けて計算していくと結構簡単な問題になった。なかなか楽しめた。最後に問題ができたので良かった。

(4) 数学は面白いと感じた。

問題 2 も同様に、問題を数学の言葉に翻訳することから始めて、微分の概念を導入し、6 回にわたって問題の解答に導いた。これも最後に、説明つきの完全な解答をレポートの課題とした。

学生の感想から、問題 2 は少々難しかったようだ。よく理解しないで書いたレポートが多く残念だった。

平成13年度前期には「数学の考え方」を2クラス担当した。各々150人位の大きなクラスであったが、やはり工学部の学生が多かった（経営情報、国際関係、人文学部、3学部合わせて1割程度）。全学対象で基礎知識は要らないとシラバスに書いた、数学と名がつくと文系に敬遠されるようである。問題 1 は前年度と同じ人口問題、問題 2 は前年度難し過ぎた船の問題を次の問題 3 に換えて同様な講義を行った。

〔問題 3〕直径30cmの材木から断面が長方形の角材を作る。角材の強さは断面の横の長さ x と縦の長さ y の平方との積 $x y^2$ に比例するものとする。最も強い角材を作るには x をいくりにすればよいか？

学生の大半は感想を書いてくれた。感想を読んで学生は考えることを嫌がっているわけではないことがよく分かり、心強く思った。主なものを拾ってみる。文末、括弧の中のアλファベットは学生の所属学科を表す。

〔平成13年度問題 1 の感想〕

- (1) 中学や高校の数学とは違って考え方が変わって面白い。何人からスタートしても最終的には同じ人口になるのには本当にびっくりした。授業の進め方も、同じ問題を3限も4限もかけてやっている。大学はいろんな講義があって面白い。でもこの問題もそうだけど、ややこしい部分があるのでしっかり授業中に理解していきたいと思った。頭を柔らかくしていこう。(A)
- (2) 変動が12%、8%ということで、遠い将来は変動がなくなることは予想できたが、最初の人口分布によらず一定の数に収束していくのは、勉強していて面白い発見でした。(M)
- (3) 最初は都市の方が多くなっていき、農村は0に近くなると思っていた。結果は60万人と40万人。かなりびっくりだった。80万人と20万人、50万人と50万人が同じ結果になったのが偶然かと思い。極端に差のある10万人と90万人で計算してみた。そしたらこれもまた60万人と40万人になり、またまたびっくりだ。そして私はやっと遠い将来には60万人と40万人になることに納得した。ちょっと信じられないような結果で、行列の計算はややこしくて苦手だったけど結果が出てみればなかなか面白かった。(A)
- (4) 最初そんな先のことが分かるのかなあって思ったけど、ちゃんと順番に考えればでき

るんだなあって思いました。難しかったです。(D)

- (5) この問題を解く前は本当に答えがこんな風になるとは想像できませんでした。まさか数字が一定のところ収束するなんて。数学はいつもごちゃごちゃした計算などがあるので嫌いでしたが、こんな楽しいものもあると知り、数学が楽しく思えてきました。
- (6) この問題を解いてみて、計算式だけで遠い将来のことまでが予想できるのはすごいです。改めて、数学は奥が深いと考えさせられました。また、行列の表現方法は便利でとても見やすいという印象を受けました。連立方程式で書いていくにはごちゃごちゃして、見にくくなるけれど、行列ではすっきりしていて、法則が見つけやすかったと思います。今回は別の方法までは思い付かなかったので暇なときにでも考えてみようと思います。(M)
- (7) 高校時代は、単に公式が与えられそれに基づいて単に計算をしていて特に何も考えなくてよかったのですが、この「数学の考え方」は証明をしていくので難しく大変ですが、数学の面白さが分かったと思います。(K)
- (8) 今までやったことのないような、自分で考える問題だったので楽しかった。(D)
- (9) 今までやってきた問題とは違って、はじめによく考える問題を解いてみて、結構面白かった。でも少し難しかった。(E)
- (10) 今回、初めてこんな風に数学を理論的に考えてみていろんなことに気がついた。数学の問題を解くに当たって根本的なことの大切さ、答えにいくまでの過程の大事さなど、やってみなければ決して分からない物をたくさん得たと思う。自分にとってこの授業はすごく役に立ち、これからも頑張ろうと思った瞬間だった。(D)
- (11) 僕が高校のとき、理系のクラスにいたんだけど、数学の授業が進むにつれて計算が複雑になり、この講義のように1つの問題に対して長い時間をかけて取り組むということがなかったので、数学がちょっと嫌いになってしまったけれど、今回のように異なった計算方法を使っても解けるという発見によって、僕の中の数学というものの考え方が少しずつ変わってきたので、次回の問題もどうやって解いていくのか楽しみです。(G)
- (12) 僕は高校生のとき文系だったので、行列という計算のやりかたをやったことがありませんでした。でもこの講義で行列をやってみてこんな計算のやり方もあるんだなと思いました。僕は数学のあの問題を理解して自力で解いたときの達成感が好きです。数学の楽しさもきっとそこにあると思います。(G)
- (13) 高校以来、数 C (行列) をやったのが久々だったので、正直かなり困惑した。しかし、高校の授業とは違ってゆっくりといろいろな視点からやるのでかなり分かりやすかった。さすが大学の教え方だと思った。現在は文系だが、こういった数学的な考え方は普通に生きていく中で大切だと思った。

(14) この「数学の考え方」でいろいろな考え方を学ぶことができました。これからただ公式だけを使う考え方はやめて、なぜそうなるかを考えて数学に取り組んでいきたいです！ (A)

(15) 数学にも、いろいろな種類の問題があるんだなあと思った。あと、問題の解き方もいろんな方法があるのに驚いた。数学はかなり奥が深いなと思う。さすが数学だと思った。また他に数学の考え方を身につけたい。(C)

〔平成 13 年度問題 2 の感想〕

- (1) この講義を受講する前までは、数学なんて日常使うのかと疑問をもっていた。しかし前回、今回のレポートを通じて、数学は本当にとっても身近なことなんだと分かった。やはり、数学は必要な学問と分かった。この先も、数学を用いて仕事をする事が出てくるだろう。その時には、今回習ったことは当然、より学力を身につけて、能率よい作業ができるようになりたい。
- (2) この授業は、数学をとっても楽しく習うことができ、1 回も休まずに出席することができました。また基礎から学ぶことで数学を見つめなおすことができ、充実した時間を送ることができました。
- (3) 微積分は高校の時にやったのですが、その時はただ単に問題が出されて、その問題を解くだけでした。微積分の意味も分からずにやっていたので、その答えが出ても、なんとも思いませんでした。もう少し意味を理解していたら、いろいろな事ができたんだと思いました。
- (4) 高校まで数学が嫌いじゃなかったけど、今回の講義を履修し、数学が「普通」から「好き」になったような気がします。一番よかったのは楽しくできたので良かったと思います。別にレポートも嫌じゃなかった。あと、身近ないろんな所に数学があるんだなーって驚きました。
- (5) 一言でいえばこの授業を受けて「数学の面白さを知った」ということです。微分することにも意味があり、数学がただ単に数式を解く作業ではないんですね。そういつたことを感じ、数学を身近に感じ、益々興味がわいてきました。
- (6) 「数学の考え方」という授業によって、数学の面白さを感じさせられた。それに、初めて微分に関する数学の知識に接した。最大値などの問題を解くには、導関数を求めればよいということが分かってきた。国籍が違っているが（韓国からの留学生）、数学の領域での考えは同じだろう。数学の世界は本当に無国籍、言語制限なしの世界である。(G)
- (7) この授業を受けて微分を勉強したおかげで、微分の面白さが見えてきました。最初、数学というのは公式や解き方のパターンを暗記し、機械的に計算ばかりやるのではないかと思ったが、そうではなかった。微分に興味を持つようになった。図書館に行って微分の参考書を読んで、微分は、私たち現実の世界の中で、たくさんの分野

- に役立っていると分かった。数学はただ単純に公式を暗記したり、問題を解いたりする無味乾燥なものではなく、何か面白さを味わえるはずだと実感しました。(G)
- (8) この問題は日常生活にも出てきそうな問題だと思う。こんなところでも微分が使われているとは思わなかった。この問題を勉強したことによって、日々の生活の中でちょっとした疑問も数学が使えるんじゃないかと考えることができるようになった。(A)

4.2 「現代数学の世界」

平成12年度後期には「現代数学の世界」を担当した。ここでは、トポロジーや数論につながる一筆書きや魔方陣などを教材にした。1つの話題に2,3回かけて、これも各時間毎に関連した小問を解いてレポートとして提出してもらった。そして最後に下記『数の悪魔』の中の1つの話「パスカルの三角形」を読んで、その中に出てくる問題を考えて感想を書くという課題を出した。

『数の悪魔』(H. M. Enzensberger 著、丘沢静也 訳)

(算数、数学が楽しくなる 12 夜)

この講義に対しては、次のような学生の感想があった。

- (1) 数学の面白さ、奥深さに気付いた。(M)
- (2) もっと知らない数学の不思議さをこれから知っていきたい。(M)
- (3) パスカルの三角形の規則性で、最初のほうに出てきた比較的簡単そうなものを自分で証明しようとしたが、途中で、どうしてよいのか分からなくなり、結局できずに終わってしまった。もしこの多くの規則性についての証明が書かれてある本があればその本を読んで、納得するだけでもしたいと思う。(M)
- (4) 改めて数は不思議だと思った。(M)
- (5) パスカルの三角形にはとても不思議な現象が多くて奥が深いものだなあと思いました。(E)
- (6) パスカルの三角形に限らず数学はほぼ無限大なものだと思う。今回の本を読んで自分も少し数学について研究してみようと思った。(E)
- (7) パスカルの三角形についての説明を聞いたり調べたりしているうちに、このような考え方があるのかと思い、目のさめる思いです。(C)
- (8) (ある法則に従って箱に色を塗る作業をしているときの話) …この数字を6, 7, 8, 9, …と大きくしていっても逆三角形が現れてきた。これはほとんど驚きだった。パスカルの三角形は奥深く興味深いものだと思う。(C)
- (9) 数学は魔法みたいだと思った。授業中に出された問題が解けたときの嬉しい気持ちと、「数の悪魔」を読んだことから、数学嫌いが無くなったような気がします。(L)
- (10) まだ文明も発達していないような大昔から数学は始まっていて、今もなお続いているのに驚いた。古代の人のすごさを知った。パスカルの三角形は奥が深いものだ。(L)
- (11) 数学は公式も大事だが、ふとした自然現象などからヒントを得てそれをつきとめ、

公式を導いてくることはとてもすばらしい事だと思った。小、中、高と数学を学んできたが、もっと違った観点から数学を知ることができていたら、数学に対する考え方も違っていたと思う。今までの自分は、公式をどうやって使って問題を解いていくかという事だけを考えていたので、もっと深い部分の数学というものを知りたい。(A)

- (12) この本を読んで、いったい自分はどこで理系と文系という線で分けられてしまったのだろうと思いました。いったいどうして分ける必要があるのだろうと思いました。日本の学生で、国語が好きだからとか英語が好きだからという理由で文系の道へ進む人は正直いって殆どないんじゃないかと思います。文系に進む殆どの人が、ただ問題を解いて行くだけという今の数学にアレルギーをおこしているだけだと思います。この本を読んではっきり言えることは、数学はとても面白いということです。数学とはいかに簡単に分かり易く謎を解いていくかというもののなのです。だからこの本のように絵も多く数遊びのようなものから始まり、大きな不思議へと進んでいく面白さに、とても惹き付けられるのではないのでしょうか。私はパスカルの三角形というのを余りよく知りませんでしたが、たったこの三角形1つでいろいろな不思議があり、また様々な見方ができて本当に面白いと思いました。数学においてこの楽しさ面白さがとても重要ではないかと思いました。(J)

全体を通して半数の学生が感動した、楽しかった、また数学が面白いと思ったということを書いている。これは私の予想以上の結果で、学生の感性や知識欲は健全だと思った。特にパスカルの三角形を読んで自由な空想を広げてゆく様子をみるのは嬉しかった。

一方、最後の感想(12)にあるように、高校時代から文科系理科系に、また大学に入る段階でさらに細かく自分の方向を決めなければならないのは、学生によっては無理がある。「楽しむ」ということをもっと真剣に考えた上で、自分で納得の行く生き方を選べるといいと思う。

人間は、生物を構成している個々の細胞のように、社会の中でそれぞれ何らかの役割をもって生きている。そして自分の役割を十分果たしているとき生き生きとし、生き甲斐を感じるのだと思う。「楽しい」と思う心は、自分の役割を知るための指針になる。判断基準を自分の中に持たない人間が作る社会は恐ろしい。私は、戦争中の教育や、戦後の学生運動の中で、自分の中によほどしっかりした指針をもたなければ人は簡単に洗脳されてしまうことを見てきた。健全な社会を支えるためには、「社会の一部の人だけではなく、一人ひとりが自分で物を考え、行動する」ことが重要であるということを痛感した。その意味で、自分の中の判断基準を大切にしたいと思っている。

5 講義の進め方、気をつけていること

教養の数学については、まず納得し、感動することに重点を置いたので、学生の様子

を見ながら進むということになり、シラバス通りにいかない。予定の範囲を余り厳しく考えないようにしている。数学の内容は忘れてしまっても、納得して満足した経験を持つことが大切だと思う。進度の違いに対しては、できるだけ予備知識を必要としない教材を選び、必要なことは復習してから使うということで対処している。それでもまだ文系の学生には難しいのか、敬遠されているようである。

専門基礎教育としての数学は、専門教育に必要な、基礎的な実力をつけることが目標なので、できるだけ厳しい訓練を積み重ねながらシラバス通りに進むよう心がけている。これは本人がやる気にならなければできないこと。やる気を引き出すには、第一に学生が理解できること、その上で役に立つ、面白いと思う講義をしたい。教師としてできることはそこまでではないだろうか。勉強するかどうかは自分で決めることであり、成績は貰うものではなくて自分が獲得するものということを強調している。したがって、欠席、いねむりは自己責任ということで余り注意しないが、遅刻、私語については周りの迷惑を考えるよう厳しく注意する。

専門基礎科目の場合は、進度の違う学生が混ざっているとやりにくい、この問題はクラス分けで解決されることを期待する。

教養、専門基礎共に、90分の講義配分は、大体60分を講義、30分を演習に当てている。問題が解けたら提出して退室する。ゆっくり時間をかけて問題を解きたい学生は、次回に提出してもよい。このレポートを、3段階採点するので出席は取らない。学生が理解できる教材を選んで、できるだけ一緒に考えるという形式で授業を進める。毎回最後の30分は、学生が自分で手を動かして問題に取り組み、それを手伝う。

6 評価方法

教養の数学については、感動する心や、考える力を点数で評価することは不可能だし、評価するべきものではないと思うので、授業ごとに提出する小レポートと、2つのレポートを、よく考えているかどうかを基準に、それぞれ3段階評価し（真面目にレポートに取り組んでいる（10点）、いい加減に書いている（5点）、レポートを提出しないすなわち欠席（0点））、これらを総合して採点している。専門基礎の数学については、中間試験、期末試験の点数と毎回提出することになっている小レポートを3段階評価したものを総合して採点する。

7 おわりに

自分で物を考え行動することは、概念の蓄積、すなわち教養に支えられている。ということは、複雑になった社会を反映して、大学の大衆化は自然な方向であるし、大学は、従来の大学とは別の意味をもつことになるのも自然なことだと思う。すなわち、教養教育の比重の大きい大学が求められているのではないか。

現在、教養の数学としては上記のような知識欲を掘り起こすことに重点を置いているので、訓練までは届かない。訓練を通して概念を構成することは、専門教育としてばかりでなく教養教育としても重要なことであろう。この意味で、高校では文系理系の区別なしに数学教育をして欲しい。試験対応型の教育ではなく実質的な数学教育を。そのとき、大学ではもっと充実した教養数学の授業ができる。高校で試験対応型の教育になってしまうのには、大学入試のやり方にも責任がある。小中高大の教育全体の問題として考えなければならない。

(教授 工学部 理学教室)