

$GI^X/M/s/s$ 待ち行列の定常分布の解析

馬 場 裕*

The Analysis of the Steady-State Distribution in the $GI^X/M/s/s$ Queueing System

Yutaka BABA

Abstract

The $GI^X/M/s/s$ queueing system is studied for both the part batch acceptance strategy and the whole batch acceptance strategy by using a supplementary variable. We start by studying the steady-state joint distribution of the number of customers present and the elapsed time since the last arrival. This gives the asymptotic distribution of the number of customers both at an arbitrary moment and immediately after an arrival. Also the loss probability of an arbitrary customer is easily obtained.

1. 序 論

有限待ち合い室をもつ集団到着待ち行列システムは、計算機システム等の多くの実用的なシステムに現われる待ち行列モデルであるので、その定常分布や種々の特性量を解析することは重要である。しかしながら現在までに研究されたモデルは少ない。Kabak〔5〕,〔6〕, Manfield et al.〔7〕, Meitzler〔8〕は到着間隔分布とサービス分布の両方が指数分布である複数サーバー待ち行列モデルの研究を行った。Van Hoorn〔10〕, Baba〔1〕は到着間隔分布が指数分布で、サービス分布が一般分布の単一サーバー待ち行列モデルの研究を行った。特に Baba〔1〕においては、サービス分布のラプラス・スティルチェス変換がわかるという下で、種々の特性量（任意時点及びサービス終了直後の定常分布や、待ち時間のラプラス・スティルチェス変換等）の陽な表現式

を与え、種々の興味深い特性を数値例によって示した。

本論文では、到着間隔分布が一般分布で、サービス分布が指数分布である複数サーバー呼損系待ち行列システム ($GI^X/M/s/s$) の定常分布や呼損率の解析を二つの batch acceptance strategy (part batch acceptance strategy と whole batch acceptance strategy) について、経過到着時間を補助変数に用いる手法で行なう。

2. $GI^X/M/s/s$ の解析

定義

$A(x)$: 到着時間間隔の分布関数

$a(x)$: 到着時間間隔の密度関数

$N(t)$: 時刻 t における系内数

$U(t)$: 時刻 t における経過到着時間

$1/\mu$: サービス分布の平均

$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$: バッチサイズの分布

$$\lambda(x) = \frac{a(x)}{\bar{A}(x)} \quad (\text{ただし } \bar{A}(x) = 1 - A(x))$$

* 経営情報学科—オペレーションズリサーチ
(Department of Business Administration and Information Science—Operations Research)

とする。ここで到着時間間隔の密度関数 $a(x)$ の存在を仮定しなくても結果は得られるが、議論を簡単にするためこの仮定をおく。

本節で解析するモデルは次の二つの batch acceptance strategy についてである。一つは到着したバッチのサイズが残っている待ち室数よりも大きい時は、残りの待ち室に入れる客だけ系内に入り、余った客は退去する。この方策を part batch acceptance strategy と呼ぶ。一方、到着したバッチのサイズが残っている待ち室よりも大きい時は、到着したバッチ全体の客が系外に退去する。この方策を whole batch acceptance strategy と呼ぶ。

いずれのモデルにおいても

$$p_k(x, t) dx = P((N(t) = k) \& (x < U(t) \leq x + dx)) \quad (k=0, 1, \dots, s) \quad (1)$$

とおくと、次の偏微分方程式系を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) p_k(x, t) = -\{\lambda(x) + k\mu\} p_k(x, t) + (k+1)\mu p_{k+1}(x, t) \quad (0 \leq k \leq s-1) \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) p_s(x, t) = -\{\mu(x) + s\mu\} p_s(x, t) \quad (3)$$

定常状態の分布を求めるために、 $t \rightarrow \infty$ とすれば、(2), (3)における t に関する微分係数は 0 になる。定常状態における $(N(t), U(t))$ の漸近分布を

$$p_k(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(x, t) \quad (0 \leq k \leq s) \quad (4)$$

とすると、(2), (3)より

$$\frac{d}{dx} p_k(x) + \{\lambda(x) + k\mu\} p_k(x) = (k+1)\mu p_{k+1}(x) \quad (0 \leq k \leq s-1) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} p_s(x) + \{\lambda(x) + s\mu\} p_s(x) = 0 \quad (6)$$

を得る。(5), (6)より、

$$p_k(x) = \bar{A}(x) \sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} C_{k+i} \exp\{- (k+i)\mu x\}$$

$$(C_{k+i} \text{ は積分定数}), \quad (0 \leq k \leq s) \quad (7)$$

を得ることができる。(7)の証明は厳密には数学的帰納法によるのであるが、証明は簡単なので、

ここでは省略する。

到着間隔分布 $A(x)$ のラプラス・スティルチェス変換を

$$A^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dA(x) \quad (8)$$

とおけば、(7)より任意時点における定常状態確率 $P_k^* (0 \leq k \leq s)$ を次のように計算することができる。

$$P_k^* = \int_0^\infty p_k(x) dx = \sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} C_{k+i} \left\{ \frac{1}{(k+i)\mu} - \frac{1}{(k+i)\mu} A^*((k+i)\mu) \right\} \quad (1 \leq k \leq s) \quad (9)$$

$$P_0^* = \int_0^\infty p_0(x) dx = \frac{C_0}{\lambda} + \sum_{i=1}^s (-1)^i C_i \left\{ \frac{1}{i\mu} - \frac{1}{i\mu} A^*(i\mu) \right\} \quad (10)$$

また正規化条件

$$\sum_{k=0}^s P_k^* = 1 \quad (11)$$

と(9), (10)より $C_0 = \lambda$ が証明できる。(ただし $1/\lambda = \int_0^\infty \bar{A}(x) dx$, $1/\lambda$ は到着時間間隔の平均)

(9), (10)において積分定数 $C_i (i=1, \dots, s)$ が決定すれば、定常状態確率 $P_k^* (k=0, \dots, s)$ は完全に決定されることがわかる。具体的な $C_i (i=1, \dots, s)$ の決定は、二つの batch acceptance strategy である part batch acceptance strategy と whole batch acceptance strategy の場合で異なっており、以下に述べる境界条件により決定することができる。

(i) part batch acceptance strategy の境界条件

$$p_0(0) = 0 \quad (12)$$

$$p_k(0) = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{k-1} p_i(x) g_{k-i} \lambda(x) dx \quad (1 \leq k \leq s-1) \quad (13)$$

$$p_s(0) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=0}^{s-1} p_i(x) \sum_{n=s-i}^\infty g_n + p_s(x) \right\} \lambda(x) dx \quad (14)$$

(13), (14)は(7)を代入することにより, それぞれ次の式になる。

$$\sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} C_{k+i} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{s-i} (-1)^i \binom{i+j}{j} C_{i+j} A^*((i+j)\mu) g_{k-i} \quad (15)$$

$$(1 \leq k \leq s-1)$$

$$Cs = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{n=s-i}^{\infty} g_n \sum_{j=0}^{s-i} (-1)^j \binom{i+j}{j} C_{i+j} A^*((i+j)\mu) + Cs A^*(s\mu) \quad (16)$$

よって, $C_0 = \lambda$ と(15), (16)より $C_i (i=0, 1, \dots, s)$ に関する連立一次方程式を解くことにより, 積分定数 $C_i (i=0, \dots, s)$ が決定され, (9), (10)により定常確率分布 $P_k^* (k=0, \dots, s)$ が求まる。

(ii) whole batch acceptance strategy の境界条件

$$p_0(0) = \int_0^{\infty} p_0(x) \lambda(x) \sum_{i=s+1}^{\infty} g_i dx \quad (17)$$

$$p_k(0) = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} p_i(x) \lambda(x) g_{k-i} dx + \int_0^{\infty} p_k(x) \lambda(x) \sum_{i=s+1-k}^{\infty} g_i dx \quad (18)$$

$$(1 \leq k \leq s)$$

(17), (18)は(7)を代入することにより, それぞれ次の式になる。

$$\sum_{j=0}^s (-1)^j C_j = \sum_{j=0}^s (-1)^j C_j A^*(j\mu) \quad (19)$$

$$\sum_{j=0}^{s-k} (-1)^j \binom{k+j}{j} C_{k+j} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{s-i} (-1)^j \binom{i+j}{j} C_{i+j} A^*((i+j)\mu) + \sum_{j=0}^{s-k} (-1)^j \binom{k+j}{j} C_{k+j} A^*((k+j)\mu) \sum_{i=s+1-k}^{\infty} g_i \quad (20)$$

$$(1 \leq k \leq s)$$

(i) の場合と同様にして, $C_0 = \lambda$ と(19), (20)より $C_i (i=0, 1, \dots, s)$ に関する連立一次方程式を解くことにより, 積分定数 $C_i (i=0, 1, \dots, s)$ が決定され, (9), (10)により定常確率分布 $P_k^* (k=0, \dots, s)$ が求まる。

(i), (ii)より二つの batch acceptance strategy における積分定数 $C_i (i=0, \dots, s)$ と任意時点における定常確率分布 $P_k^* (k=0, \dots, s)$ が求

まると, これらより種々の特性量を計算することができる。

(A) 到着直後における系内客数分布

$$q_k (k=0, \dots, s)$$

(A1) part batch acceptance strategy の場合

$$q_0 = p_0(0) = 0$$

$$q_k = p_k(0) = \sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} C_{k+i}$$

$$(1 \leq k \leq s-1)$$

$$q_s = P_s(0) = C_s \quad (21)$$

(これらは(12)~(16)による)

(A2) whole batch acceptance strategy の場合

$$q_0 = p_0(0) = \sum_{j=0}^s (-1)^j C_j$$

$$q_k = p_k(0) = \sum_{j=0}^{s-k} (-1)^j \binom{k+j}{j} C_{k+j}$$

$$(1 \leq k \leq s)$$

(22)

(これらは(17)~(20)による)

(B) 呼損率

Burke[2]によれば, ある任意の客がサイズ i のバッチの客として到着する確率は

$P(\text{任意の客がサイズ } i \text{ のバッチの客として到着する})$

$$= ig_i / \bar{g} \quad (23)$$

(ただし $\bar{g} = \sum_{i=1}^{\infty} ig_i$, $\bar{g}$ は平均バッチサイズ)

で与えられる。よってある任意の客が系内に入れない確率, すなわち呼損率を BP とすれば,

(B1) part batch acceptance strategy の場合

$$BP = \frac{1}{g} \sum_{k=0}^s \int_0^{\infty} p_k(x) \lambda(x) \sum_{i=s-k+1}^{\infty} (i-s+k) g_i dx$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^{s-k} (-1)^j \binom{k+j}{j} C_{k+j} A^*((k+j)\mu) \sum_{i=s-k+1}^{\infty} (i-s+k) g_i \quad (24)$$

(B2) whole batch acceptance strategy
の場合

$$\begin{aligned}
 BP &= \frac{1}{g} \sum_{k=0}^s \int_0^{\infty} p_k(x) \lambda(x) \sum_{i=s-k+1}^{\infty} i g_i dx \\
 &= \frac{1}{g} \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^{s-k} (-1)^j \binom{k+j}{j} C_{k+j} A^*((k+j)\mu) \\
 &\quad \sum_{i=s-k+1}^{\infty} i g_i
 \end{aligned} \tag{25}$$

で与えられる。

3. 結 論

GI^X/M/s/s において、経過到着時間を補助変数にとることによって、この確率過程をマルコフ化し、諸特性量の導出を行った。その結果、これらの特性量は、到着時間間隔の分布関数 $A(x)$ のラプラス・スティルチェス変換 $A^*(s)$ がわかっているれば書き表わせることがわかる。

今後の課題としては、本論文で解析したシステムと双対で応用上も重要である $M^X/G/s/s$ システムの近似解析等があげられる。

〔参 考 文 献〕

- [1] Baba, Y.: The $M^X/G/1$ Queue with Finite Waiting Room. *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 27 (1984), 260-273.
- [2] Burke, P. J.: Delays in Single Server Queues with Batch Input. *Opns. Res.* vol. 23(1975), 830-833.
- [3] Hokstad, P.: Asymptotic Behaviour of the $E_k/G/1$ Queue with Finite Waiting Room. *J. Appl. Prob.* vol. 14(1977), 358-366.
- [4] Henderson, W.: Alternative Approaches to the Analysis of the $M/G/1$ and $GI/M/1$ Queues. *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 15(1972), 92-101.
- [5] Kabak, I. W.: Blocking and Delays in $M^{X0}/M/c$ Bulk Queueing Systems. *Opns. Res.* vol. 16 (1968), 830-840.
- [6] Kabak, I. W.: Blocking and Delays in $M^{X0}/M/c$ Bulk Arrival Queueing Systems. *Management Science*, vol. 17(1970), 112-115.
- [7] Manfield, D. R. and Tran-Gia, P.: Analysis of a Finite Storage System with Batch Input Arising out of Message Packetization. *IEEE, Trans. Commun.* vol. 30(1982), 456-463.
- [8] Meitzler, D.: A Generalization of Erlang's Loss Formula in Queueing. *J. Appl. Prob.* vol. 5 (1968), 143-157.
- [9] Ohsone, T.: The $GI/E_k/1$ Queue with Finite Waiting Room. *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 24 (1981), 215-226.
- [10] Van Hoorn, M.H.: Algorithms for the State Probabilities in a General Class of Single Server Queueing Systems with Group Arrivals. *Management Science*, vol. 27 (1981), 1178-1187.