

平面的ヘーガード図式の接着同相写像の計算機による分解

坂田宜子*, 落合豊行**, 趙一娟***

Computational Decomposition of Gluing Homeomorphisms of Planar Heegaard Diagram

Yoshiko SAKATA*, Mitsuyuki OCHIAI** and Il-Yeun CHO***

(Received June 15, 2000)

It is very difficult to decompose gluing homeomorphisms of a planar Heegaard diagram of a two dimensional closed manifold of genus g into the products of canonical Dehn twists. Although Lickorish first gave the general method of solution, it needs special human experiences and person's intuitions in this field. Of course, the method was not always for computers because computers were then in their infancy. A decomposing system for it by a computer was constructed. Lickorish's method was arranged and new ideas such as point sequence number (PSN), final circles (f-circles) and 3-point intersection methods around holes were introduced. The computer immediately transfers the diagram into PSN as soon as you give a planar Heegaard diagram by mouse-trackings and decomposes it into the products of Dehn twists along f-circles. As the Dehn twists along f-circles are not automatically decomposed into the products of canonical Dehn twists, we calculate them by handiwork for genus 3 and make a table of decomposed products. By using this table, we get a decomposed products of gluing homeomorphisms of a planar Heegaard diagram of genus 3 for a canonical base.

Keywords : Heegaard diagram, Dehn twist, homeomorphism

1. はじめに

3次元ユークリッド空間に1個の円柱がある。円柱を曲げてその上底と下底を3次元球体に貼りつけて変形すると、ドーナツ状のものが得られる。これを種数1のハンドル体という。さらに円柱を2個、3個と貼りつける。 g 個の円柱を貼りつけたとき、それを種数 g のハンドル体という(図1参照)。

今、図2に示すように、種数 g の2つのハンドル体の表面である2次元閉多様体 $F_g (= \partial H_1 = \partial H_2)$ を自己同

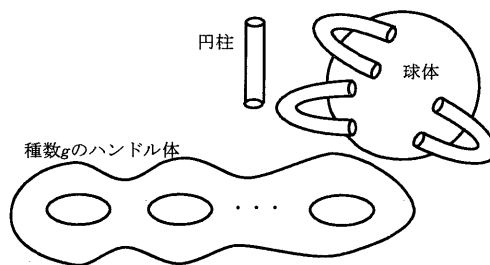


図1 種数 g のハンドル体

*情報教室 (Department of Information Processing Education)

**奈良女子大学大学院人間文化研究科 (Division of Human Life and Environmental Sciences, Nara Women's University)

***奈良女子大学大学院人間文化研究科博士課程3年 (Graduate Student, Division of Human Life and Environmental Sciences, Nara Women's University)

相写像 f で貼り合わせる。そのとき得られるのが3次元多様体 M である。 M をこのような2つのハンドル体に分解することをヘーガード分解という。 $\partial H_1 (\partial H_2)$ の単純閉曲線 $v_i (w_i)$ と $x_i (y_i)$ を

$i, j = 1, 2, \dots, g$ において

$$\begin{aligned} |v_i \cap x_i| &= 1, \quad |w_i \cap y_i| = 1, \\ |v_i \cap x_j| &= 0, \quad |w_i \cap y_j| = 0 \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

のようにとる。 f は ∂H_1 の単純閉曲線 w_i を ∂H_1 上の単純閉曲線 P_i ($i = 1, 2, \dots, g$) に写像する。図 2 の左図をヘーガード図式という。各 i, j に対して

$$|f(w_i) \cap x_j| = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

但し, $f(w_i) = P_i$ $i, j = 1, 2, \dots, g$

が成り立つとき, f は平面的であるという。このような f の貼り合わせで得られた多様体 M は平面的ヘーガード分解をもつといい, このときの接着同相写像 f を表す図 2 の左図を平面的ヘーガード図式と呼ぶ。この f を標準的デーンツイストの積(次節で定義)に分解して表現すれば, 多様体の分類研究に貢献できる。

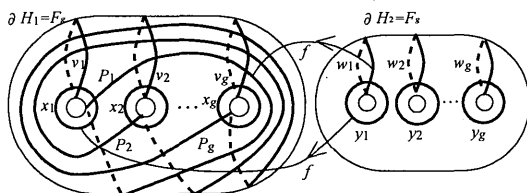


図2 平面的ヘーガード分解

f を標準的デーンツイストの積に分解する一般的な解法は Lickorish が最初に与えた (1), (2), (3))。しかし, 実際に解いてみると, それは専門的な経験と勘を必要とし, 分解は非常に困難である。ところで, 任意の閉 3 次元多様体は平面的ヘーガード分解を持つことを落合は証明した 4)。我々は自己同相写像を平面的なものに限れば, コンピュータで自動的に分解できるアルゴリズムを得られるのではないかとすることで研究を開始した。種数 2 の場合については, 極めて単純な分解アルゴリズムを発見した 5)。しかし, そのアルゴリズムは種数が 3 以上の一般の場合には適用できない。我々は Lickorish の方法に PSN, f-circle, 3 交差法などの新たなアイデアを導入して, 「種数 $g \geq 3$ の場合の f を平面的ヘーガード図式で与えたとき, それを標準的デーンツイストの積にコンピュータで分解するアルゴリズム」を構築してきた (6), 7)。本論文ではそのアルゴリズムの概要と, 実際に 3 次元トラスに適用した例について報告する。

2. 解法の概要

定義: デーンツイスト

q を F 上の単純閉曲線とする。このとき F 上の任意の曲線 p の q に沿った同相写像 $h_q^{\pm 1}: F \rightarrow F$ を図 3 のように定義する。即ち p の各点は, q の近傍以外では恒等写像, 近傍内では 2π のひねりを土の方向に加えた写像で写像される。このような写像をデーンツイストという。このとき, p を original circle, q を twisting circle, p' を resulting circle と呼び, 以下それぞれを O, T, R と記す。

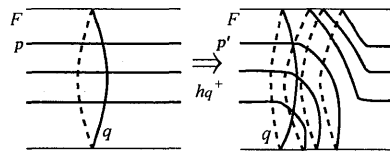


図3 デーンツイスト h_q

定義: 標準的デーンツイスト

F_g を種数 g の向き付け可能な閉曲面とする。それを図 4 に示すように g 個の unit に分け, 各 unit に標準的な単純閉曲線 $a_i, b_{2i-1}, b_{2i}, c_i$ をとる。それぞれに沿ったデーンツイストを標準的デーンツイストといい, $h_{a_i}, h_{b_{2i-1}}, h_{b_{2i}}, h_{c_i}$ と記す。

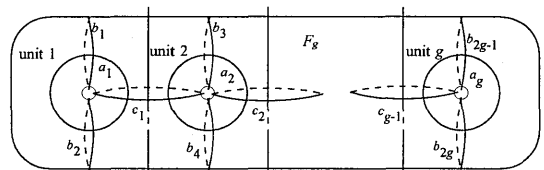


図4 標準的な circle

f の標準的デーンツイストの積への分解手順

- (i) 平面的ヘーガード図式の各 P_i をマウス入力で与える。
- (ii) $\Psi(P_i) = b_{2i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, g$) なる Ψ を求め, Ψ を標準的デーンツイストの積に分解する。
- (iii) $f = \Psi^{-1}$ で f を求める。よって $f(b_{2i-1}) = P_i$ 。

f を標準的デーンツイストの積に分解することは Ψ を標準的デーンツイストの積に分解することであるので, この手順の主要部分は (ii) となる。

これまで, 平面的ヘーガード図式を図 2 の左図のように描いてきた。これは 3 次元表現で描いた図である。この表面の 2 次元閉多様体 F_g は g 個の穴のある浮き輪のようなものである。これを図の底辺から切開して 2 次元平面に広げた図を 2 次元表現図と呼ぶ。3 次元

表現図は立体を意識した図であるが、2次元表現図は裏側の面も表側に広げて表したという意味での利便性を求めた図である。図5は後の例題で用いる3次元トラスの平面的ヘーガード図式を3次元表現と2次元表現で描いた図である。3次元表現図での穴の部分 a_i が2次元表現図では2カ所に表わされる。

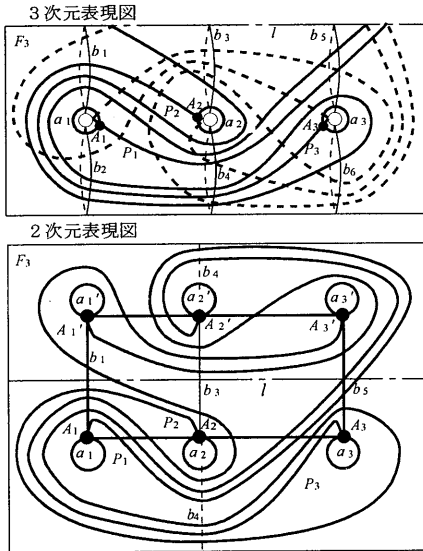


図5 3次元表現図と2次元表現図

定義：B線分

2次元表現図での矩形 $A_1A_1'A_2'A_2'$ をB線分 (basic line) と呼ぶ。

P_i ($i=1, 2, \dots, g$) は次の性質を持つ。

- (i) $|P_i \cap a_i|=1$ 。
- (ii) $|P_i \cap a_j|=0$ ($i \neq j$)。

2次元表現で、 P_i は A_i を出発し、 A_i' に至る向きを持ち、始点と終点の近傍では A_iA_i' の線分に沿わせる。コンピュータでのデータ処理のため、我々は P_i に PSN (Point Sequence Number) と呼ぶデータ構造を与える。その定義は次のとおりである。

定義：PSN (図6 上図参照)

(i) P_i とB線分の全交点、全 A_i 、全 A_i' に、点番号を振る。点番号は A_i を1とし、B線分上を時計回りに進んだときの順序数を当てる。

(ii) 各 P_i の経路は A_i から A_i' へ至る向きをもち、(i) で定めた点番号列で表される。

(iii) さらに P_i が出発点の A_i でB線分の内部に入るか(i)、外部に出る(o)かの in-out 情報を持つ。

Ψ の分解過程において a_i と交わらない単純閉曲線 Q が生じる。即ち、 Q は次の性質をもつ。

- (i) $|Q \cap a_i|=0$ ($i=1, 2, \dots, g$)。

Q も P_i から自然に導かれた PSN をもつ (図6 下図参照)。但し、 Q は常に、点番号の最小のものを始点とし、始点の次の点番号は終点の点番号より小さくなるように並び替えて標準化される。

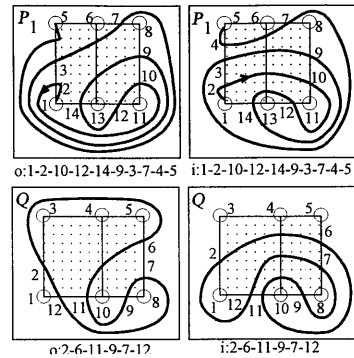


図6 P と Q の PSN

3. 主定理

3.1 Ψ を求める方法

次の補題が得られる。

補題1: 1) の Lemma 1 参照

p, q は単純閉曲線、 $|p \cap q|=1$ のとき $h_p h_q(p)=q$ 。□

補題2

$h_P h_{a_i}(P_i)=a_i, h_{a_i} h_{b_{2i-1}}(a_i)=b_{2i-1}$ ($i=1, 2, \dots, g$)。□

補題3

$\Phi_1 = \prod_{i=1}^g (h_P h_{a_i})$ とおくと $\Phi_1(P_i)=a_i$ 。

$\Phi_2 = \prod_{i=1}^g (h_{a_i} h_{b_{2i-1}})$ とおくと $\Phi_2(a_i)=b_{2i-1}$ 。

$\Psi = \Phi_2 \Phi_1$ とおくと $\Psi(P_i)=b_{2i-1}$ ($i=1, 2, \dots, g$)。□

補題3より $\Psi(P_i)=b_{2i-1}$ なる Ψ は $h_{P_i}, h_{a_i}, h_{b_{2i-1}}$ の積で表された。 h_{a_i} と $h_{b_{2i-1}}$ は標準的のデーンツイストであるが、 h_{P_i} は標準的でないので、次に h_{P_i} の標準的のデーンツイストへの分解を行う。

3.2 h_{P_i} の分解

定義： P_i 上の α と β

b_{2i-1} 上を A_i から A_i' へ向かうとき、 P_i と b_{2i-1} の最初の交点を α 、次の交点を β とする (図7 参照)。PSN の中で α の前(後)の点を $\alpha_b(\alpha_o)$ と記す。 β についても同様である。

1) の Theorem 1 より次の補題が導かれる。

補題4: 2 交差法

$|P_i \cap b_{2i-1}| \geq 3$ のとき, $|P_i \cap b_{2i-1}| - 1 = |h(P_i) \cap b_{2i-1}|$ を満たすデーンツイスト h が存在する。但し, $b_{2i-1} = A_i A'_i$ 。

このとき P_i が α , β で交わる向きは図 7 に示すように

Case I : 左に同方向,

Case II : 右に同方向,

Case III : α では左に, β では右に異方向,

Case IV : α では右に, β では左に異方向

の 4 通りある。さらに各 Case において P_i が P_1 か $P_i (i \neq 1, i \neq g)$ か P_g かによって 3 通りに分けられる。合計 12 通りの各場合についての, h とそのときの $O (=P_i)$ から得られる T と R の PSN は表 1 の通りである。

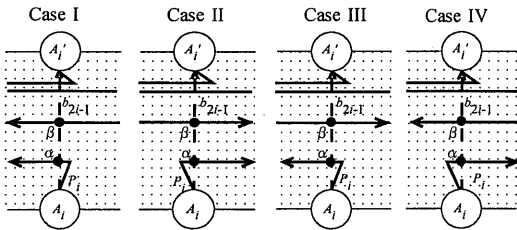


図 7 Case I, II, III, IV

表 1 2 交差法

Case	h	P_i		PSN
I α :左 β :左	hr	P_1	O	$A'_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\alpha - \dots - \beta$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
		P_i	O	$A_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\alpha - \dots - \beta$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
II α :右 β :右	hr^{-1}	P_1	O	$A'_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\alpha - \dots - \beta$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
		P_i	O	$A_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\alpha - \dots - \beta$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
III α :左 β :右	$hr^{-1} h_{ai}$	P_1	O	$A'_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\alpha - \dots - \beta - \text{右}$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
		P_i	O	$A_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\text{左} - \alpha - \dots - \beta - \text{右}$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
IV α :右 β :左	$hr h_{ai}^{-1}$	P_1	O	$A'_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$\text{右} - \alpha - \dots - \beta$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$
		P_i	O	$A_i - \alpha - \dots - \beta - \dots - \beta - \dots - A'_i$
			T	$R - \alpha - \dots - \beta - \text{左}$
			R	$A_i - \beta - \dots - A'_i$

補題 4 を P_i に適用すると, $h(P_i)$ と $A_i A'_i (=b_{2i-1})$ の交点数が確実に 1 個減る。このとき得られた R が b_{2i-1} でないとき, それを O と見なしして補題 4 を適用する。この反復を $|O \cap b_{2i-1}| = 2$ になるまで続ける。その結果, 図 8 のどちらかの場合に帰着する。左図の場合は $O = b_{2i-1}$ となって終端に達しているが, 右図のように $|O \cap B \text{ 線分}| \neq 0$ のとき, さらに補題 5 を適用して, $O = b_{2i-1}$ に至らせる。

補題 5

$|O \cap b_{2i-1}| = 2$ かつ $|O \cap B \text{ 線分}| \neq 0$ のとき, O に補題 4 を適用して, $h(O) = b_{2i-1}$ とするデーンツイスト h を求めることができる。

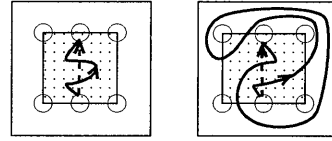


図 8 $|P_i \cap b_{2i-1}| = 2$ の場合

補題 6

$H(P_i) = b_{2i-1}$ とするような H を求めることができる。

H は下記の Algorithm-P によって求められる。

Algorithm-P

P1. $H = "", j = 1$

P2. $|P_i \cap b_{2i-1}| \leq 2$ かつ $|P_i \cap B \text{ 線分}| = 0$ のとき $P_i = b_{2i-1}$ で終了。

P3. $|P_i \cap b_{2i-1}| \leq 2$ かつ $|P_i \cap B \text{ 線分}| \neq 0$ のとき, $h_i(P_i) = b_{2i-1}$ にするデーンツイスト h_i が存在する。P5 へ進む。

P4. $|P_i \cap b_{2i-1}| \geq 3$ のとき, $|P_i \cap b_{2i-1}| - 1 = |h_j(P_i) \cap b_{2i-1}|$ とするデーンツイスト h_j が存在する。

P5. このとき得られた T を Q_j , R を P_j とすると, $h_j(P_i) = P_j$ 。但し h_j の一般形は表 1 より $h_j = h_{Q_j}^{\pm 1} h_{ai}^{\pm 1,0}$ 。

P6. $H = h_j + H$, $P_i = P_{j_0}$

P7. $j = j + 1$ 。P2 へ戻る。

Algorithm-P の概念図を図 9 に示す。

補題 7 : 2) の Lemma 1 参照

H を $H:F \rightarrow F$ なる自己同相写像とする。 p, q を F 上の単純閉曲線とする。このとき

$$H(p) = q \text{ なら } h_p \simeq H^{-1} h_q H.$$

但し, $\simeq$ はイソトピーであることを示す。

補題 8

$$H(P_i) = b_{2i-1} \text{ なら } h_{P_i} \simeq H^{-1} h_{b_{2i-1}} H.$$

よって h_{P_i} は H と $h_{b_{2i-1}}$ の積で表される。Algorithm-P より $H = h_1 \cdots h_n h_0$ 。 $h_j = h_{Q_j}^{\pm 1} h_{ai}^{\pm 1,0}$ であるので, H は h_{Q_j} , h_{ai} , $h_{b_{2i-1}}$ との積で表される。 h_{ai} と $h_{b_{2i-1}}$ は標準的デー

ンツイストであるが、 h_{Q_j} はまだ標準的でない。次に h_{Q_j} の標準的デーツイストへの分解を行う。

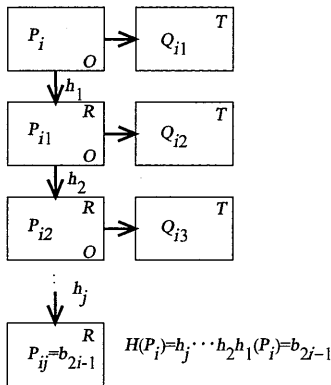


図9 Hを求める概念図

3.3 h_{Q_j} の分解

定義：Q上の α, β, γ

A_1 から時計回りにB線分上を進むとき、QとB線分のある交点を α 、次の交点を β 、その次の交点を γ とする。PSNの中で α の前(後)の点を $\alpha_\circ(\alpha_\circ)$ と記す。 β, γ についても同様である。

補題9

Qは α, β でB線分と常に交互の向きで交差する。□

交点 α, β, γ と穴の位置関係から交点数を減らすためのデーツイスト h を求めるために、我々は次の補題を導いた。

補題10：3交差法

$|Q \cap B \text{線分}| \geq 3$ のとき、QとB線分の α, β, γ での交わり方は、Qが α でB線分に対してinの方向に交わるかoutの方向に交わるか、さらにそれに続くPSNの中での β, γ の出現順序により、

Case V： α でin、 α, β, γ の順序、

Case VI： α でin、 α, γ, β の順序、

Case VII： α でout、 α, β, γ の順序、

Case VIII： α でout、 α, γ, β の順序

の4通りに分けられる。さらに、各Caseはハンドル体の穴がB線分上でどのような位置関係で存在するかにより、

- 1) $\alpha\beta$ 間、 $\beta\gamma$ 間に共に穴が存在しない、
- 2) $\alpha\beta$ 間に穴が存在し、 $\beta\gamma$ 間に穴が存在しない、
- 3) $\alpha\beta$ 間に穴が存在せず、 $\beta\gamma$ 間に穴が存在する、
- 4) $\alpha\beta$ 間にも $\beta\gamma$ 間にも穴が存在する

の4通りに分けられる(図10参照)。

表2はこれら16通りの各場合について、 $O(=Q)$ とB線分の交点を減らすデーツイスト h の存在性を示す。 h が存在する場合は、 $|Q \cap B \text{線分}| - 2 = |h(Q) \cap B \text{線分}|$ 。このとき、Oから得られるTとRは共に a_i と交わらないQの性質を有する。□

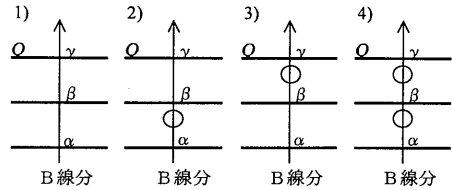


図10 α, β, γ と穴の位置関係

表2 3交差法

Case	h	PSN
V α :in $O: \dots - \alpha - \dots - \beta - \dots - \gamma - \dots$	1), 2) hr	T $\gamma - \dots - \alpha_\circ$
		R $\alpha - \dots - \beta - \gamma - \dots - \alpha_\circ - \beta - \dots - \gamma_\circ$
	3) hr	T $\gamma - \dots - \alpha$
		R $\alpha - \dots - \beta - \gamma - \dots - \alpha - \beta - \dots - \gamma$
	4)	交点数を減らせない
VI α :in $O: \dots - \alpha - \dots - \gamma - \dots - \beta - \dots$	1), 3) hr^{-1}	T $\alpha - \dots - \gamma_\circ$
		R $\alpha - \dots - \gamma - \beta - \dots - \alpha - \gamma - \dots - \beta$
	2) hr^{-1}	T $\alpha - \dots - \gamma$
		R $\alpha - \dots - \gamma - \beta - \dots - \alpha - \gamma - \dots - \beta$
	4)	交点数を減らせない
VII α :out $O: \dots - \alpha - \dots - \beta - \dots - \gamma - \dots$	1), 3) hr^{-1}	T $\gamma - \dots - \alpha$
		R $\alpha - \dots - \beta - \gamma - \dots - \alpha - \beta - \dots - \gamma$
	2) hr^{-1}	T $\gamma - \dots - \alpha_\circ$
		R $\alpha - \dots - \beta - \gamma - \dots - \alpha - \beta - \dots - \gamma_\circ$
	4)	交点数を減らせない
VIII α :out $O: \dots - \alpha - \dots - \gamma - \dots - \beta - \dots$	1), 2) hr	T $\alpha - \dots - \gamma$
		R $\alpha - \dots - \gamma - \beta - \dots - \alpha - \gamma - \dots - \beta$
	3) hr	T $\alpha - \dots - \gamma_\circ$
		R $\alpha - \dots - \gamma - \beta - \dots - \alpha - \gamma - \dots - \beta$
	4)	交点数を減らせない

証明の概略

Case VIIIの3)の場合について述べる(図11参照)。Qは α でB線分とoutで交わり、PSNの中での α, β, γ の出現順序は α, γ, β である。補題9より、Qは α, γ, β でB線分と交互の向きで交わるのが保証される。この場合、Tを図のようにとり、 hr を施すとRは右図のようになる。 $\alpha\beta$ 間には穴が存在しないので、イソトピー移動で α と β の交点を消去できる。

ところで、同じCase VIIIでも4)の場合は、 $\alpha\beta$ 間にも、 $\beta\gamma$ 間にも穴があるので、イソトピーで移動しても穴が邪魔して、交点を消去できない。

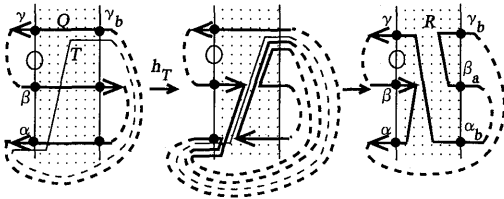


図11 Case VIIIの3)の場合への3交差法の適用

定義 : f-circle

Q が B 線分上の穴と穴の間を高々 1 回しか交差しないとき f-circle (final circle) と呼ぶ。

補題11

Q に補題 10 の 3 交差法を適用すると,

$$|Q \cap B \text{線分}| - 2 = |h_{Q_1}(Q) \cap B \text{線分}| \text{ なる } h, Q_1,$$

$Q_2 (=h_{Q_1}(Q))$ を得るか, または Q が f-circle となっているかのいずれかである。

□

Algorithm-Q は補題 11 の判別アルゴリズムである。

Algorithm-Q

Q1. A_1 を出発点として, B 線分に沿って時計回りに進み, 最初の Q との交点を α , 以下, 定義に従って β , γ をとる。

Q2. α, β, γ に補題 10 の 3 交差法を適用する。

・ Case V~VIII の 1)~3) のとき, $O(=Q)$ より h , $T(=Q_1)$, $R(=Q_2)$ を得る。終了。

・ Case V~VIII の 4) のとき $\beta \rightarrow \alpha$, $\gamma \rightarrow \beta$ にし, B 線分をさらに進んで, 次の Q との交点 γ をとる。

Q3. γ が出発点の A_1 を越えないときは Q2 へ戻る。

Q4. そうでなくて一回りしたとき, Q は f-circle である。終了。

Q が f-circle でないとき, 補題 11 より, Q_1 と Q_2 を求め, 補題 7 より $h_Q = h_{Q_1}^{-1} h_{Q_2} h_{Q_1}$ が導ける。即ち h_Q は h_{Q_1} と h_{Q_2} で表される。 Q_1 および Q_2 と B 線分との交点数は Q のそれよりは少なくなるので, Q_1 および Q_2 は Q よりも単純化された閉曲線である。 $Q_i (i=1,2)$ が f-circle でないとき, 各 Q_i を Q と見なして補題 11 を適用し, さらに単純化された Q_1 と Q_2 を得る。次の補題が導かれる。

補題12

Q が f-circle でないとき, h_Q を f-circle に沿ったデーンツイストの積で表わすことができる。

□

Algorithm-R は補題 12 を実現するためのものである。

Algorithm-R

R1. Q に補題 11 を適用して h, Q_1, Q_2 を得る。但し $h_{Q_1}(Q) = Q_2$ 。よって $h_Q = h_{Q_1}^{-1} h_{Q_2} h_{Q_1}$ を得る。

R2. Q_1 が f-circle でないなら, Q_1 を Q として R1 を行う。 Q_2 が f-circle でないなら, Q_2 を Q として R1 を行う。

R3. 全ての Q_i, Q_j についてこれを繰り返して, 図 12 のようなデーンツイストの漸化的二分木を得る。この二分木の枝の先は f-circle である。

R4. h_Q はこれらの f-circle に沿ったデーンツイストの積で表現される。

補題 12 により h_Q は f-circle に沿ったデーンツイストの積で表されることがわかった。次に f-circle に沿ったデーンツイストを標準的デーンツイストの積への分解を行う必要がある。

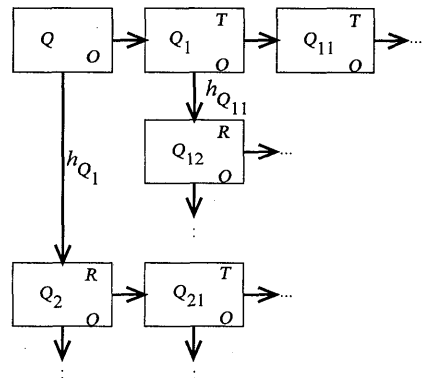


図12 デーンツイストの漸化的二分木

3.4 f-circleに沿ったデーンツイストの分解

f-circle にこれまでの 2 交差法や 3 交差法を適用して, これ以上, B 線分との交点数を減少させることは不可能である。しかし, f-circle はハンドル体の穴と穴の間を高々 1 回しか通過しないため, かなり単純化されている。その f-circle の全個数は種数の数により決まる有限個数である。組合せ論的に数えたところ, 種数が 3, 4, 5 のときの f-circle の個数は表 3 のとおりである。種数が増えると飛躍的に個数が増えることがわかる。

表3 f-circleの個数

種数	3	4	5
個数	53	434	4297

f-circle の PSN は自動的に得られるが、これらに沿ったデーツイストの標準的デーツイストへの分解の自動化はまだ実現していない。

図 13 は種数 3 の場合の全 f-circle を示す。

種数 3 の f-circle に沿ったデーツイストの標準的なデーツイストへ分解については Lickorish の方法 2),

3) により、手計算で求めた。その結果を表 4 および表 5 に示す。よって、種数 3 の場合については、最後の f-circle の段階で表参照法により完全に接着同相写像の分解が実現できる。

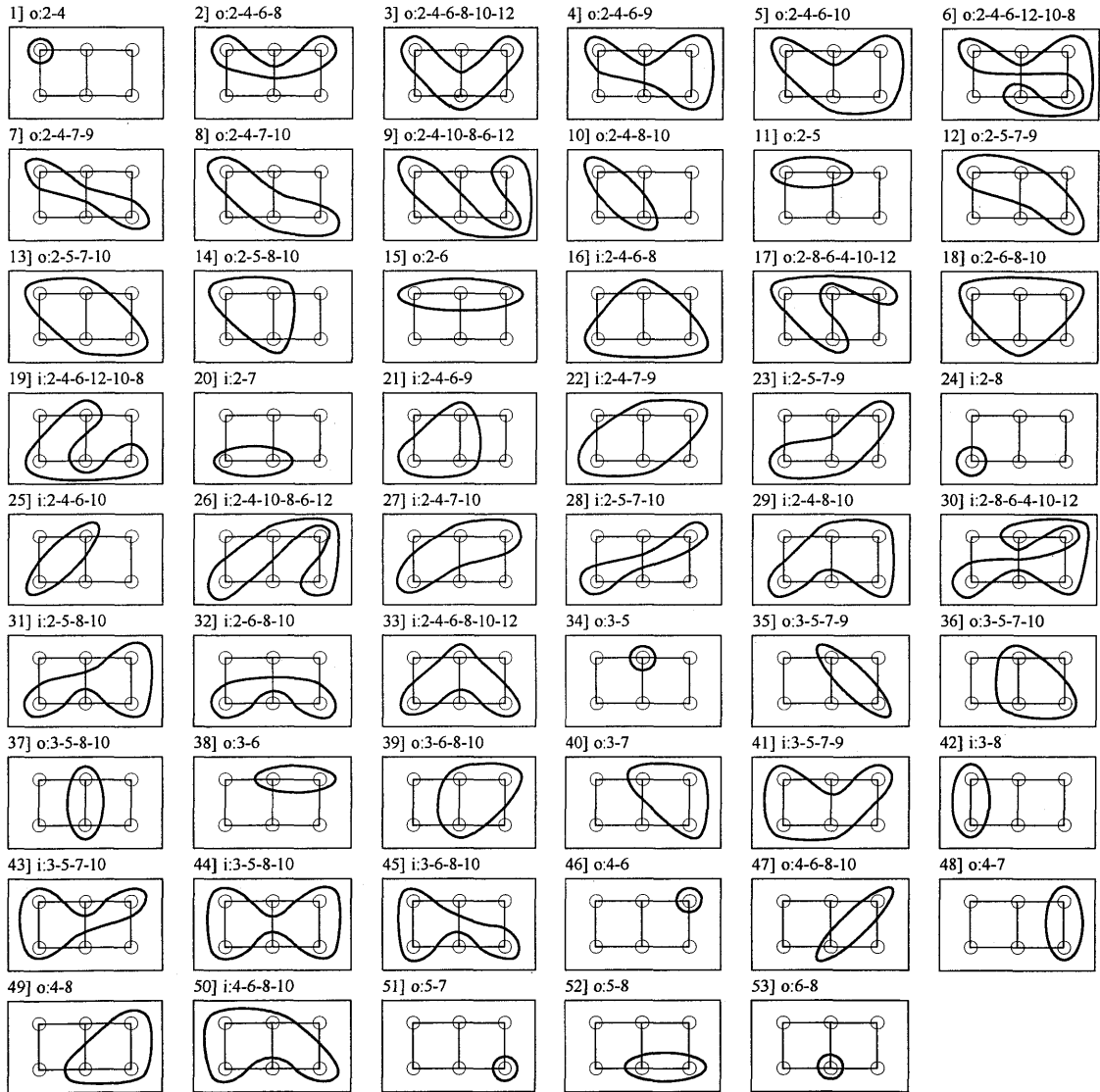


図13 種数 3 のときの全 f-circle とその PSN

表4 f-circleに沿ったデーンツイストの分解

$h_{11}=h_{a1}$
$h_{21}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{02}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{02}(2))$
$h_{31}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_4(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_4(3))$
$h_{41}=(F_{22}(1)f_{20}(1))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1)f_{20}(2))$
$h_{51}=(f_{22}(1)f_5(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_5(1))$
$h_{61}=h_{49}^{-1}h_9h_{49}$
$h_{71}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_{02}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_{02}(2))$
$h_{81}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1))$
$h_{91}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_5(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_5(3))$
$h_{101}=(F_{22}(1)f_5(1))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1)f_5(1))$
$h_{111}=(f_{22}(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1))$
$h_{121}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(3))$
$h_{131}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2)f_5(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2)f_5(1))$
$h_{141}=(f_{22}(1)f_{23}(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{23}(1))$
$h_{151}=(f_{22}(1)f_{22}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2))$
$h_{161}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2))$
$h_{171}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(2))$
$h_{181}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2))$
$h_{191}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(2))$
$h_{201}=(F_{22}(1))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1))$
$h_{211}=(F_{22}(1)f_{23}(1))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1)f_{23}(1))$
$h_{221}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2)f_4(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{32}(2)f_4(3))$
$h_{231}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_4(3))$
$h_{241}=h_{a1}$
$h_{251}=(F_{22}(1)f_4(2))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1)f_4(2))$
$h_{261}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_5(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_5(3))$
$h_{271}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1))$
$h_{281}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_{02}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_{02}(2))$
$h_{291}=(F_{22}(1)f_5(1))^{-1}h_{a1}(F_{22}(1)f_5(1))$
$h_{301}=h_{40}^{-1}h_{26}h_{40}$
$h_{311}=(f_{22}(1)f_{20}(1))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{20}(1))$
$h_{321}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{02}(2))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_{02}(2))$
$h_{331}=(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_4(3))^{-1}h_{a1}(f_{22}(1)f_{22}(2)f_5(1)f_4(3))$
$h_{341}=h_{a2}$
$h_{351}=(F_{22}(2)f_5(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_5(2))$
$h_{361}=(F_{22}(2)f_{32}(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_{32}(2))$
$h_{371}=h_{d2}$
$h_{381}=(f_{22}(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2))$
$h_{391}=(f_{22}(2)f_{32}(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_{32}(2))$
$h_{401}=(f_{22}(2)f_{23}(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_{23}(2))$
$h_{411}=(f_{22}(2)f_5(3))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_5(3))$
$h_{421}=h_{d1}$
$h_{431}=(F_{22}(2)f_{02}(2))^{-1}h_{a2}(F_{22}(2)f_{02}(2))$
$h_{441}=h_{e2}$
$h_{451}=(f_{22}(2)f_{02}(2))^{-1}h_{a2}(f_{22}(2)f_{02}(2))$
$h_{461}=h_{a3}$
$h_{471}=(F_{22}(2)f_4(3))^{-1}h_{a2}(F_{22}(2)f_4(3))$
$h_{481}=h_{d3}$
$h_{491}=(F_{22}(2)f_{23}(2))^{-1}h_{a2}(F_{22}(2)f_{23}(2))$
$h_{501}=(F_{22}(2)f_5(3))^{-1}h_{a2}(F_{22}(2)f_5(3))$
$h_{511}=h_{a3}$
$h_{521}=(F_{22}(2))^{-1}h_{a2}(F_{22}(2))$
$h_{531}=h_{a2}$

表5 h_{d1}, F, f

$h_{d1}=h_{b21}^{-1}h_{a1}h_{b21}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21}^{-1}h_{a1}h_{b21}^{-1}$	$h_{e1}=h_{b21}^{-1}h_{a1}h_{b21}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21}^{-1}h_{a1}h_{b21}^{-1}$
$F_4(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}=f_4^{-1}(i)$	$F_5(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}=f_5^{-1}(i)$
$F_{02}(i)=h_{b21}^{-1}h_{a1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}$	$f_{02}(i)=h_{b21}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}$
$F_{20}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}$	$f_{20}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}$
$F_{22}(i)=h_{ci}h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}$	$f_{22}(i)=h_{ci}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}$
$F_{23}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{ci}^{-1}$	$f_{23}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{ci}^{-1}$
$F_{32}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}$	$f_{32}(i)=h_{b21-i}^{-1}h_{a1}^{-1}h_{b21-i}^{-1}h_{ci}^{-1}$

次に、本論文での主定理を示す。

主定理

平面的ヘーガード図式の接着同相写像 f は標準的デーンツイストの積に自動的に分解できる。

但し、 $f=\Psi^{-1}$ 。 $\Psi(P_i)=b_{2i-1}$ ($i=1, 2, \dots, g$)。

f-circle に沿ったデーンツイストは標準的デーンツイストの積で表参照できるものとする。□

本論文での議論は、最後の f-circle の標準的なデーンツイストへの分解を手計算で作成した表参照という条件下で、一般の種数についても適用できる。よって f-circle に沿ったデーンツイストの標準的デーンツイストへの分解の自動化が今後の課題として残された。

4. 3次元トーラスへの適用

3次元トーラスは種数3のハンドル体をその表面で貼り合わせたものである。その基本群は

$$\Pi_1(T^3)=\{a, b, c \mid P_1:cbc^{-1}b^{-1}=e, P_2:a^{-1}c^{-1}ac=e, P_3:ab^{-1}a^{-1}b=e\}$$

で与えられる。その平面的ヘーガード図式は図5に示した。

例：3次元トーラスのヘーガード図式において、 $\Psi(P_i)=b_{2i-1}$ ($i=1, 2, 3$) なる Ψ を求める。

本アルゴリズムによる解法

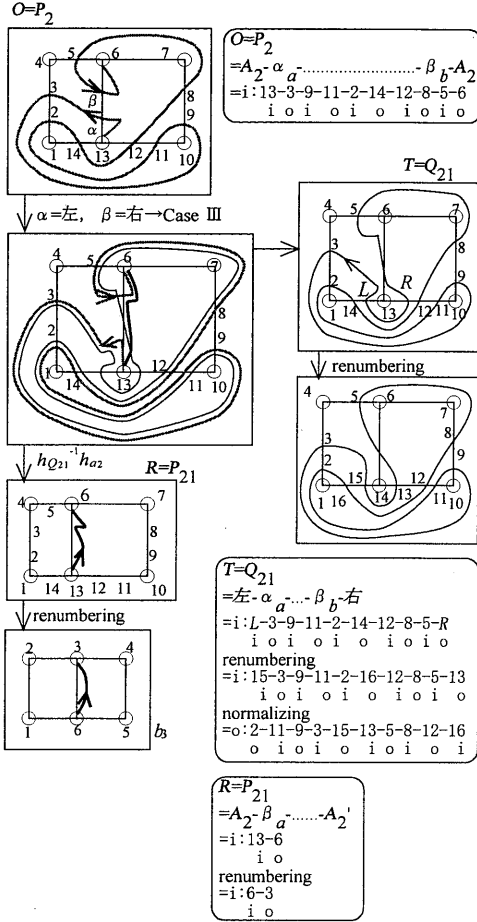
補題3より、 $\Psi(P_i)=\Phi_2$ $\Phi_1(P_i)=b_{2i-1}$ ($i=1, 2, 3$)。

但し、 $\Phi_1=h_{P_3}h_{a3}h_{P_2}h_{a2}h_{P_1}h_{a1}$ 、 $\Phi_2=h_{a3}h_{b3}h_{a2}h_{b2}h_{a1}h_{b1}$ 。

h_{P_i} 以外は標準的デーンツイストであるので、 h_{P_i} について分解する。代表として h_{P_2} について示す。

図5の2次元表現図から P_2 を取り出す(図14参照)。 P_2 は α で左、 β で右に交差するので、Case IIIで P_i ($i \neq 1, i \neq g$)。 $O(=P_2)$ のPSNから、表1を参照して、 $T(=Q_{21})$ と $R(=P_{21})$ のPSNを求める。PSN上でイソトピーの処理や、番号振り替えの処理をして、 Q_{21} と $P_{21}(=b_5)$ のPSNを得る。

$$h_{Q_{21}}^{-1}h_{a2}(P_2)=b_3 \text{ より } h_{P_2}=(h_{Q_{21}}^{-1}h_{a2})^{-1}h_{b3}(h_{Q_{21}}^{-1}h_{a2})。$$


 図14 P_2 の分解

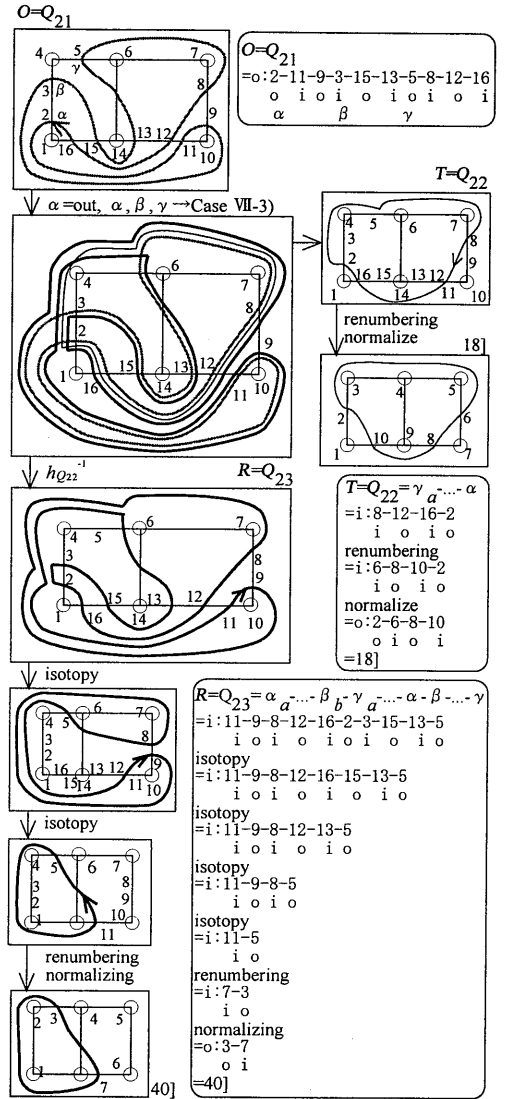
次に $h_{Q_{21}}$ を求める。図 15 に示すように、 Q_{21} は α で out, PSN には α, β, γ の出現順序で現れるので、Case VII, しかも $\beta \gamma$ 間に穴があるので、3) の場合である。 $O (=Q_{21})$ の PSN から、表 2 を参照して、 $T (=Q_{22})$ と $R (=Q_{23})$ の PSN を得る。イソトピー移動の処理や、PSN の番号振り替え、標準化の処理をして、 $h_{Q_{22}}^{-1}(Q_{21})=Q_{23}$ の Q_{22} と Q_{23} の PSN を得る。 Q_{22} , Q_{23} は図 13 より f-circle 18], 40] であるので、 $h_{Q_{21}}=h_{18}[h_{40}]h_{18}]^{-1}$ 。

よって $h_{P_2}=(h_{18}[h_{40}]^{-1}h_{18}]^{-1}h_{a_2}]^{-1}h_{b_2}(h_{18}[h_{40}]^{-1}h_{18}]^{-1}h_{a_2})$ 。

h_i は、表 4, 表 5 より標準的デーニツイストの積で表されるので、 h_{P_2} は標準的デーニツイストの積で表された。

他も同様にして、

$$h_{P_1}=(h_{38}[h_{21}]h_{38}]^{-1}h_{a_1}]^{-1}h_{b_1}(h_{38}[h_{21}]h_{38}]^{-1}h_{a_1})$$


 図15 Q_{21} の分解

$$h_{P_3}=(h_{15}[h_{39}]^{-1}h_{15}]h_{a_3})^{-1}h_{b_3}(h_{15}[h_{39}]^{-1}h_{15}]h_{a_3})$$

を得る。最終的に、 Ψ は、実に 324 個の標準的デーニツイストの積で表された。よって $f=\Psi^{-1}$ より f が標準的デーニツイストの積で求められた。

経験論的解法

同じ 3 次元トーラスの問題において、我々はその経験と勘で直接的に解いたところ次式の結果を得た。

$$\Psi=ha_1ha_2ha_3^2h_{49}[h_{14}]^{-1}h_{15}]^{-1}h_{47}]^{-1}h_{15}[h_{38}]^{-1}.$$

標準的デーニツイストに換算すると、98 項の短さで

ある。

5. 結 論

種数 g の平面的ヘーガード図式を与えたとき, その図式から定まる接着同相写像を標準的デーンツイストの積にコンピュータを用いて分解するためのアルゴリズムを構築した。一般的方法は Lickorish が最初に与えた。しかし, 実際に図式を与えてそのように分解するには, 専門的知識を駆使して, 経験と勘に頼って Lickorish の手法のいくつかを組み合わせる必要がある。それは, その場限りのエクセレントな解を見つけることは可能であるが, 誰でも解けるというものではなく, コンピュータシステムとして実現できるものではない。我々の提案した手法によったコンピュータシステムは, 平面的ヘーガード図式の接着同相写像の分解, ひいては 3 次元多様体の分類研究に有効である。

しかし, まだいくつかの問題点を残している。全体的には一般の種数に対応したシステムであるが, 最後の f -circle に沿ったデーンツイストの部分が不十分である。 f -circle の列挙は組合せ論的手法を用いて求めることができるが, それに沿ったデーンツイストは人手に頼っている。種数 3 のときは f -circle の数も少ないが, より大きな種数になると, 人手での解決は, 労力だけの問題というより, ミスの混入という問題が生じる。また, 3 次元トーラスの経験論的解法での分解項数と比較しても, 我々の方法はまだ改良の余地があることを示唆している。

f -circle に沿ったデーンツイストの自動分解, 分解項数の削減といった点を, 今後の研究課題としていきたい。

参 考 文 献

- 1) W. B. R. Lickorish, A Representation of Orientable Combinatorial 3-Manifolds. Ann. of Math., Vol. 76, No. 3, 1962, pp. 531-540.
- 2) W. B. R. Lickorish, A Finite Set of Generators for the Homeotopy Group of a 2-Manifold. Proc. Camb. Philos. Soc., Vol. 60, 1964, pp. 769-778.
- 3) W. B. R. Lickorish, On the Homeotopy Group of a 2-Manifold (corrigendum). Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 62, 1966, pp. 679-681.
- 4) M. Ochiai, Heegaard Diagrams of 3-Manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 1991, pp.863-879.
- 5) Y. Sakata, M. Ochiai and K. Satoh, Twist Decompositions of Gluing Homeomorphisms of Planar Heegaard Diagrams of Genus Two, accepted in Proc. A.M.S..
- 6) Y. Sakata, M. Ochiai and Il-Yeun Cho, Computational Decomposition of Homeomorphisms into Canonical Dehn's Twists. IMACS-ACA'99, in Spain, 1999.
- 7) Il-Yeun Cho, Y. Sakata, and M. Ochiai, Computational Decomposition of planar Homeomorphisms into Canonical Dehn's Twists by Computer. KNOTS2000, in Korea, 2000.