

横等方弾性体 Mindlin 問題の一解法

勅使川原 誠司*

An Analytical Method of Mindlin Problem for a Transversely Isotropic Medium

Seiji TESHIGAWARA*

(Received May 30, 1996)

The present paper deals with a method of analysis of a semi-infinite transversely isotropic medium subjected to vertical and horizontal point forces in its interior. It may be called Mindlin problem.

In general, these solutions are obtained by superposition of a composite solutions and a homogeneous one. A composite solutions is derived from a fundamental solution which is called a Kelvin's one. This fundamental solution is very difficult to show by elementary functions because the solution represents a semi-infinite integral expression. Leaving the semi-infinite integral expression for this fundamental solution as it was, we made the boundary equations on the plane boundary of the semi-infinite medium. From the integrand of this equation, we determined an unknown constant of the fundamental solution. According to this analytical method, we can easily obtain Mindlin solutions without carrying out the inverse integral transformation.

Keywords : anisotropic medium, Mindlin problem, analytical method, integral transformation

1. 序

弾性地盤内の応力, 変形問題を弾性理論的に扱う場合, 基本的解となるものに Mindlin の第一解, 第二解¹⁾がある。これは半無限等方弾性体内の一点に境界面と垂直な方向及び水平な方向に集中力が作用するもので, ひずみ核の合成, 重ね合わせによる方法で解が導かれている。

最上²⁾は同じ問題を積分変換を用いることにより簡便に解いている。この種の問題に積分変換法を使うことは数学的处理に無理がないことから, 八幡他³⁾は Mindlin の動的問題を Fourier 変換によって解いている。さらに

地盤を粘土地盤, 砂地盤の堆積過程に見られる異方性弾性体に対する静的 Mindlin 解を加藤他⁴⁾も Fourier 変換を用いて解いている。この Fourier 変換法による解法を用いた場合, 最終的な解を得る段階で逆変換を行う必要があり, 斎次解に含まれるポテンシャルの未定係数を決定する境界条件式が半無限積分を含まない初等関数表示で与えられる必要がある。横等方弾性体の動的問題では, この計算が困難であり解を求めることができない。そこで, この計算過程の煩雑さを避ける方法として著者等は先に, 基本解である Kelvin 解より求められる合成解を半無限積分の形に置き直して静的 Mindlin 問題を

*建築学科 (Department of Architecture)

解いた最上の方法を用いて、等方弾性体の動的 Mindlin 解を積分逆変換なしに求めた⁵⁾。

埋め込み基礎や地中杭の振動問題等に基本的解となる動的 Mindlin 解を明らかにすることは、力学特性が不明確な地盤と基礎の相互作用問題に対し、弾性理論解析を容易にするものであり、異方性地盤の静的、動的問題の解を簡便な方法で示すことは、より解析を容易にする利点を持つことになる。

以上のことから本報では、横等方弾性体に対する動的 Mindlin 問題の解析解を導く手法の検討のため、前報⁵⁾で行った方法を静的 Mindlin の問題に適用し、この方法の有効性を明らかにする。

解析方法の概略は、基本解となる無限体中の一点に集中力が作用した時の変位、応力解である Kelvin 解を使った合成解と斉次解の重ね合わせにより Mindlin 解を求めるもので、斉次解に含まれるポテンシャルの未定係数を、境界条件式を半無限積分表示のままにして決定するものである。

2. Kelvin 解と斉次解

水平方向と垂直方向の変形特性（ヤング率、ポアソン比）が異なる横等方弾性体は 5 個の弾性定数（a, b, c, d, e）を持ち、平衡方程式は直交 cartesian 座標において次式で与えられている⁶⁾。

$$\begin{bmatrix} B\Delta' + AD_x^2 + eD_z^2 & AD_xD_y \\ AD_xD_y & B\Delta' + AD_y^2 + eD_z^2 \\ E_0D_xD_z & E_0D_yD_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$A = (a + b)/2, \quad B = (a - b)/2, \quad E_0 = c + e, \quad X_i = -X_i \delta(x, y, z) \quad i=1 \sim 3$$

$$D_x = \partial/\partial x, \quad D_y = \partial/\partial y, \quad D_z = \partial/\partial z, \quad \Delta' = D_x^2 + D_y^2$$

(1) 式より得られる変位の一般解は Fourier 変換を用いて次式の様求められる。

$$\begin{aligned} u_1 &= -(e\Delta' + dD_z^2)IX_1 \\ &\quad + \{Ae\Delta' + (Ad - E_0^2)D_z^2\}D_y(D_yIX_1 - D_xIX_2) + E_0D_xD_zIX_3 \\ u_2 &= -\{Ae\Delta' + (Ad - E_0^2)D_z^2\}D_x(D_yIX_1 - D_xIX_2) \\ &\quad - (e\Delta' + dD_z^2)IX_2 + E_0D_yD_zIX_3 \\ u_3 &= E_0D_z(D_xIX_1 + D_yIX_2) - (a\Delta' + eD_z^2)IX_3 \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

ここで、Galerkin ベクトルである I, J は弾性定数間の関係、すなわち歪みエネルギー正值の条件、(1) 式の係数行列より得られる偏微分方程式の解の条件等より、 $c + 2e \geq \sqrt{ad}$ に対し次式となる。

1) $c + 2e > \sqrt{ad}$ の時

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4\pi de} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-c_1 z \rho}}{c_1} - \frac{e^{-c_2 z \rho}}{c_2} \right) \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \frac{J_0(r\rho)}{\rho^2} d\rho \\ J &= -\frac{1}{4\pi de^2} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-c_0 z \rho}}{c_0(c_0^2 - c_1^2)(c_0^2 - c_2^2)} - \frac{e^{-c_1 z \rho}}{c_1(c_0^2 - c_1^2)(c_1^2 - c_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-c_2 z \rho}}{c_2(c_0^2 - c_2^2)(c_1^2 - c_2^2)} \right] \frac{J_0(r\rho)}{\rho^4} d\rho \end{aligned}$$

$$c_0 = \sqrt{B/e}, \quad c_1 = X + iY, \quad c_2 = X - iY,$$

$$X = \{(\sqrt{ad} - c)(\sqrt{ad} + c + 2e)\}^{1/2}/2\sqrt{de},$$

$$Y = \{(\sqrt{ad} + c)(-\sqrt{ad} + c + 2e)\}^{1/2}/2\sqrt{de} \quad \cdots \cdots (3)$$

2) $c + 2e = \sqrt{ad}$ の時

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{8\pi de \bar{X}^3} \int_0^\infty (\bar{X}z\rho + 1) e^{-Xz\rho} \frac{J_0(r\rho)}{\rho^2} d\rho \\ J &= \frac{1}{4\pi de^2} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-c_0 z \rho}}{c_0(c_0^2 - \bar{X}^2)^2} + \frac{(\bar{X}z\rho + 1)e^{-Xz\rho}}{2\bar{X}^3(c_0^2 - \bar{X}^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-Xz\rho}}{X(c_0^2 - \bar{X}^2)^2} \right] \frac{J_0(r\rho)}{\rho^4} d\rho \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \{2\sqrt{ad}(\sqrt{ad} - c)\}^{1/2}/2\sqrt{de} = \sqrt{a/d} \quad \cdots \cdots (4)$$

であり、2) の $c + 2e = \sqrt{ad}$ の場合の解は等方弾性体に対する解になるものである。

(2) 式において、 $X_1 = X_2 = 0$ 、 $X_3 \neq 0$ とすれば z 軸方向に集中力が作用する Mindlin (I) の問題に対する Kelvin 解、 $X_1 \neq 0$ 、 $X_2 = X_3 = 0$ とすれば x 軸方向に集中力が作用する Mindlin (II) の問題に対する Kelvin 解が得られることになる。

次に、(1) 式の平衡方程式において、物体力 $X_i = 0$ とする斉次方程式の解は係数行列が

$$\det(L_{ij}) = (B\Delta' + eD_z^2)\{(a\Delta' + eD_z^2)(e\Delta' + dD_z^2) - E_0^2\Delta'D_z^2\}$$

となることから

$$(B\Delta' + eD_z^2)\{H_1, H_2, H_3\}^T = 0$$

$$\{(a\Delta' + eD_z^2)(e\Delta' + dD_z^2) - E_0^2\Delta'D_z^2\}\{K_1, K_2, K_3\}^T = 0$$

$\cdots \cdots (5)$

の偏微分方程式を満足するポテンシャル H_i , K_i を用いれば変位成分は次式で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned}
u_1 &= (B_4' + eD_z^2)(eA' + dD_z^2)K_1 \\
&+ \{A(eA' + dD_z^2) - E_0^2 D_z^2\} D_x^2 (H_1 + K_1) \\
&- \{A(eA' + dD_z^2) - E_0^2 D_z^2\} D_x D_y (H_2 + K_2) \\
&- E_0(B_4' + eD_z^2) D_x D_z K_3 \\
u_2 &= -\{A(eA' + dD_z^2) - E_0^2 D_z^2\} D_x D_y (H_1 + K_2) \\
&+ (B_4' + eD_z^2)(eA' + dD_z^2)K_2 \\
&+ \{A(eA' + dD_z^2) - E_0^2 D_z^2\} D_x^2 (H_2 + K_1) \\
&- E_0(B_4' + eD_z^2) D_y D_z K_3 \\
u_3 &= -E_0(B_4' + eD_z^2) D_x D_z K_1 - E_0(B_4' + eD_z^2) D_y D_z K_3 \\
&+ (B_4' + eD_z^2)(eA' + dD_z^2)K_3 \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

既往の結果^{4,5)}によれば, Mindlin (I), (II) の問題に適するポテンシャルは H_1 , K_3 の 2 個であり, 斉次解に現れる共通な偏微分項を考慮した後の H_1 , K_3 を Fourier 変換によって求めると次式となる。

1) $c+2e > \sqrt{ad}$ の時

$$\begin{aligned}
H_1 &= H = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty B_5 e^{-c_0 z \rho} \rho J_0(r\rho) d\rho \\
H_3 &= K = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty (B_1 e^{-c_1 z \rho} + B_2 e^{-c_2 z \rho}) \rho J_0(r\rho) d\rho
\end{aligned} \dots\dots (7)$$

2) $c+2e < \sqrt{ad}$ の時

$$\begin{aligned}
H_1 &= H' = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty B_5' e^{-c_0 z \rho} \rho J_0(r\rho) d\rho \\
H_3 &= K' = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty (B_1' + B_2' z) e^{-X z \rho} \rho J_0(r\rho) d\rho
\end{aligned} \dots\dots (8)$$

(7), (8) 式に含まれる未定係数 $B_1 \sim B_5'$ は応力の境界条件式より決定されるものであり, 加藤, 八幡の解析では, Kelvin 解と斉次解の重ね合わせで表される応力式を Fourier 逆変換を行い, 初等関数表示で求めている。横等方弾性体の動的 Mindlin 問題を解こうとする場合, 逆変換を求めることが困難で, 未定係数を決定することができない。そこで本研究では Kelvin 解, 斉次解とも半無限積分表示のまま解析する方法により境界条件式を求め, 未定係数を決定する最上の解析法を使い, その有効性を明らかにすると共に, 横等方弾性体に対する境界条件式についても検討を行ってみる。なお, 弾性定数の違いによるベクトル・ポテンシャルの相違は解析方法に影響を与えないので, $c+2e > \sqrt{ad}$ の場合について述べ, $c+2e = \sqrt{ad}$ は代表的な解のみを示す。

3. Mindlin (I) の解

半無限横等方弾性体の境界面を $x-y$ 平面とし, 深さ方向を z に採れば, Mindlin (I) の問題は任意の深さ位置に z 軸方向の集中力 P_z が作用する軸対称問題となる。この場合の Kelvin 解として, (2) 式において $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = P_z$ とすれば変位, 応力は円筒座標を使って

$$\begin{aligned}
u_r &= -\frac{E_0 P_z}{4\pi d e} \int_0^\infty \frac{(e^{-c_1 z \rho} - e^{-c_2 z \rho})}{(c_1^2 - c_2^2)} J_1(r\rho) d\rho \\
u_z &= -\frac{P_z}{4\pi d e} \int_0^\infty \left\{ \frac{(a - ec_1^2) e^{-c_1 z \rho}}{c_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(a - ec_2^2) e^{-c_2 z \rho}}{c_2} \right\} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) J_0(r\rho) d\rho \\
\sigma_{rr} &= -\frac{P_z}{4\pi d e} \int_0^\infty [e\{a + cc_1^2\} e^{-c_1 z \rho} \\
&\quad - (a + cc_2^2) e^{-c_2 z \rho}] \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \rho J_0(r\rho) \\
&\quad - \frac{2BE_0(e^{-c_1 z \rho} - e^{-c_2 z \rho})}{(c_1^2 - c_2^2)} \frac{J_1(r\rho)}{r} d\rho \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\frac{P_z}{4\pi d e} \int_0^\infty [(bE_0 - ac + cec_1^2) e^{-c_1 z \rho} \\
&\quad - (bE_0 - ac + cec_2^2) e^{-c_2 z \rho}] \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \rho J_0(r\rho) \\
&\quad + \frac{2BE_0(e^{-c_1 z \rho} - e^{-c_2 z \rho})}{(c_1^2 - c_2^2)} \frac{J_1(r\rho)}{r} d\rho \\
\sigma_{zz} &= -\frac{P_z}{4\pi d e} \int_0^\infty [(ad - cE_0 - dec_1^2) e^{-c_1 z \rho} \\
&\quad - (ad - cE_0 - dec_2^2) e^{-c_2 z \rho}] \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \rho J_0(r\rho) d\rho \\
\sigma_{zr} &= -\frac{eP_z}{4\pi d e} \int_0^\infty \left\{ \frac{(a + cc_1^2) e^{-c_1 z \rho}}{c_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(a + cc_2^2) e^{-c_2 z \rho}}{c_2} \right\} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \rho J_1(r\rho) d\rho \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 0 \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

(6) 式の斉次解において, z 方向のみに力が作用する条件, $H_1 = K_1 = H_2 = K_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ とすれば, 偏微分に関して共通項となる $(B_4' + eD_z^2)K_3$ を改めて K_3 とし, (7) 式の関係を用いれば

$$u_r = -\left(\frac{E_0}{2\pi}\right) \int_0^\infty (c_1 B_1 e^{-c_1 z \rho} + c_2 B_2 e^{-c_2 z \rho}) (\rho^3) J_1(r\rho) d\rho$$

$$\begin{aligned}
u_z &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{(a - ec_1^2)B_1 e^{-c_1 z\rho} - \frac{c_2(ad - cE_0 - dec_2^2)}{(c_1^2 f^2 + r^2)^{3/2}}\} \\
&\quad + (a - ec_2^2)B_2 e^{-c_2 z\rho}\}(\rho^3)J_0(r\rho)d\rho \\
\sigma_{rr} &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty [e\{(a + cc_1^2)c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (a + cc_2^2)c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho}\}(\rho^4)J_0(r\rho) \\
&\quad - 2BE_0(c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} + c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho})\left(\frac{\rho^3}{r}\right)J_1(r\rho)]d\rho \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty [(bE_0 - ac + cec_1^2)c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (bE_0 - ac + cec_2^2)c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho}\}(\rho^4)J_0(r\rho) \\
&\quad + BE_0(c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} + c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho})\left(\frac{\rho^3}{r}\right)J_1(r\rho)]d\rho \\
\sigma_{zz} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{(ad - cE_0 - dec_1^2)c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (ad - cE_0 - dec_2^2)c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho}\}(\rho^4)J_0(r\rho)d\rho \\
\sigma_{zr} &= \left(\frac{e}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{(a + cc_1^2)B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (a + cc_2^2)B_2 e^{-c_2 z\rho}\}(\rho^4)J_1(r\rho)d\rho \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{z\theta} = 0 \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

以上によって Kelvin 解, 斉次解が求められた。Mindlin (I) の解は, 無限体中 ($z-f$) (*) と ($z+f$) (**) に仮想外力 P_z , $-P_z$ が作用した時の合成解⁽⁻⁾ と斉次解(***) の重ね合わせで解けることから, (10) 式の未定係数 B_1 , B_2 は境界条件である弾性体表面 $z=0$ で $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = 0$ より決定できる。ところで, (9), (10) 式を使って B_1 , B_2 を決定する前に, 初等関数表示で Kelvin 解を求めた既往の結果⁽⁶⁾によれば応力は

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \frac{zP_z}{4\pi de(c_1^2 - c_2^2)} \left\{ \frac{c_1(ad - cE_0 - dec_1^2)}{v_1^3} - \frac{c_1(ad - cE_0 - dec_2^2)}{v_2^3} \right\} \\
\sigma_{zr} &= \frac{eP_z}{4\pi de(c_1^2 - c_2^2)} \left\{ \frac{(a + cc_1^2)}{c_1 v_1^3} - \frac{(a + cc_2^2)}{c_2 v_2^3} \right\} \\
v_1 &= (c_1^2 z^2 + r^2)^{1/2}, \quad v_2 = (c_2^2 z^2 + r^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

で与えられており, 合成解による境界条件式を求めると

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -\frac{fP_z}{2\pi de(c_1^2 - c_2^2)} \left\{ \frac{c_1(ad - cE_0 - dec_1^2)}{(c_1^2 f^2 + r^2)^{3/2}} \right.$$

$$\left. \bar{\sigma}_{zr}|_{z=0} = 0 \right.$$

となる。ここで $\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0}$ の式に注目すると, 積分公式

$$\int_0^\infty x e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\text{を使えば } \int_0^\infty e^{-c_1 f\rho} \rho J_0(r\rho) d\rho = \frac{c_1 f}{(c_1^2 f^2 + r^2)^{3/2}}$$

となることより

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} &= -\frac{P_z}{2\pi de} \int_0^\infty \{(ad - cE_0 - dec_1^2)e^{-c_1 f\rho} \\
&\quad - (ad - cE_0 - dec_2^2)e^{-c_2 f\rho}\} \left(\frac{\rho}{c_1^2 - c_2^2}\right) J_0(r\rho) d\rho
\end{aligned}$$

と表すことができる。この式は (9) 式の Kelvin 解において, $z \rightarrow f$, $P_z \rightarrow -2P_z$ に置き換えたものと一致する。これは同様の解析を行った等方弾性体の静的, 動的問題^(2,5)においても成立した関係であり, 数学的帰納法の考えを用いれば, Kelvin 解が半無限積分表示で示される横等方弾性体の動的問題にも適用可能な関係と言える。従って, この場合の境界条件式は

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} + \sigma_{zz}^{***}|_{z=0} = 0 \quad \text{より} \\
&= -\frac{P_z}{2\pi de} \int_0^\infty \{(ad - cE_0 - dec_1^2)e^{-c_1 f\rho} \\
&\quad - (ad - cE_0 - dec_2^2)e^{-c_2 f\rho}\} \left(\frac{\rho}{c_1^2 - c_2^2}\right) J_0(r\rho) d\rho \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{(ad - cE_0 - dec_1^2)c_1 B_1 \\
&\quad + (ad - cE_0 - dec_2^2)c_2 B_2\}(\rho^4)J_0(r\rho)d\rho \\
&= 0 \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zr}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zr}|_{z=0} + \sigma_{zr}^{***}|_{z=0} = 0 \quad \text{より} \\
\left(\frac{e}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{(a + cc_1^2)B_1 + (a + cc_2^2)B_2\}(\rho^4)J_1(r\rho)d\rho &= 0 \quad \dots (12)
\end{aligned}$$

となり, 被積分関数の関係より, 未定係数 B_1 , B_2 は次式となる。

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{(a + cc_2)P_z}{(c_1 - c_2)^2(c_1 + c_2)(ad - c^2)eE_0\sqrt{ad}} \left\{ \right. \\
&\quad \left. (ad - cE_0 - dec_1^2)e^{-c_1 f\rho} - (ad - cE_0 - dec_2^2)e^{-c_2 f\rho} \right\} \\
B_2 &= -\frac{(a + cc_1)}{(a + cc_2)} B_1 \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

この結果を用いて u_z , σ_{zz} , σ_{zr} を求めると

$$\begin{aligned}
 u_z = & \frac{-P_z}{4\pi de} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \left[\frac{(a - ec_1^2)}{c_1} \left(\frac{1}{v_{10}} - \frac{1}{v_{11}} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{(a - ec_2^2)}{c_2} \left(\frac{1}{v_{20}} - \frac{1}{v_{22}} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{2e\sqrt{ad}}{(c_1 - c_2)(ad - c^2)} \left\{ \frac{(c + dc_2^2)^2}{v_{11}} + \frac{(c + dc_1^2)^2}{v_{22}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (c + dc_1^2)(c + dc_2^2) \left(\frac{1}{v_{12}} + \frac{1}{v_{21}} \right) \right\} \right] \\
 \sigma_{zz} = & \frac{P_z}{4\pi d(c_1 - c_2)^2(c_1 + c_2)} \left[(c + dc_2^2)c_1 \left\{ \frac{(c_1 - c_2)(z - f)}{(v_{10})^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(c_1 + c_2)(z + f)}{(v_{11})^3} + \frac{2(c_1f + c_2z)}{(v_{21})^3} \right\} \right. \\
 & \left. - (c + dc_1^2)c_2 \left\{ \frac{(c_1 - c_2)(z - f)}{(v_{20})^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(c_1 + c_2)(z + f)}{(v_{22})^3} - \frac{2(c_1z + c_2f)}{(v_{12})^3} \right\} \right] \\
 \sigma_{zr} = & \frac{P_z r}{4\pi d(c_1 - c_2)^2(c_1 + c_2)} \left[\left(\frac{a + cc_1^2}{c_1} \right) \left\{ \frac{(c_1 - c_2)}{(v_{10})^3} - \frac{(c_1 + c_2)}{(v_{11})^3} \right\} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{a + cc_2^2}{c_2} \right) \left\{ \frac{(c_1 - c_2)}{(v_{20})^3} + \frac{(c_1 + c_2)}{(v_{22})^3} \right\} \right. \\
 & \left. + 2c_1c_2 \left\{ \frac{(c + dc_2^2)}{(v_{21})^3} + \frac{(c + dc_1^2)}{(v_{12})^3} \right\} \right] \\
 v_{10} = & \{c_1^2(z - f)^2 + r^2\}^{1/2}, \quad v_{20} = \{c_2^2(z - f)^2 + r^2\}^{1/2}, \\
 v_{11} = & \{c_1^2(z + f)^2 + r^2\}^{1/2}, \quad v_{22} = \{c_2^2(z + f)^2 + r^2\}^{1/2}, \\
 v_{12} = & \{(c_1z + c_2f)^2 + r^2\}^{1/2}, \quad v_{21} = \{(c_2z + c_1f)^2 + r^2\}^{1/2} \\
 & \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

同じ解析方法を使って $c + 2e = \sqrt{ad}$ の場合について求めた解は以下の通りある。

$$\begin{aligned}
 u_z = & \frac{P_z}{8\pi de\bar{X}^3} \left[(a + e\bar{X}^2) \left\{ \frac{1}{v_{31}} - \frac{1}{v_{32}} \right\} \right. \\
 & \left. + (a - e\bar{X}^2) \bar{X} \left\{ \frac{(z - f)^2}{(v_{31})^3} - \frac{(z + f)^2}{(v_{32})^3} \right\} \right] \\
 & + \frac{P_z}{4\pi de} \frac{1}{\{c(2c + 3e)\bar{X}^2 + ae\}} \left[\frac{2adE_0\bar{X}}{v_{32}} \right. \\
 & \left. + 2E_0^2(af + d\bar{X}^4z) \frac{\bar{X}(z + f)}{(v_{32})^3} + 2E_0^3\bar{X}^3zf \frac{[2\bar{X}^2(z + f)^2 - r^2]}{(v_{32})^5} \right] \\
 \sigma_{zz} = & \frac{-P_z}{4\pi d\bar{X}} \left[\frac{e(z - f)}{(v_{31})^3} + \frac{3E_0\bar{X}^2(z - f)^3}{(v_{31})^5} - \frac{e(z - f)}{(v_{32})^3} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - \frac{3\bar{X}^2(z + f)\{2(e + 3E_0)(z + f)f - (c + 3e)(z + f)^2 - 6E_0f^2\}}{(v_{32})^5} \right. \\
 & \left. + \frac{30E_0\bar{X}^4zf(z + f)^3}{(v_{32})^5} \right] \\
 \sigma_{zr} = & \frac{-P_z r}{4\pi d\bar{X}} \left[\frac{e}{(v_{31})^3} + \frac{3E_0\bar{X}^2(z - f)^2}{(v_{31})^5} - \frac{e}{(v_{32})^3} \right. \\
 & \left. - \frac{3E_0\bar{X}^2(z + f)^2 - 6\bar{X}^2z\{d\bar{X}^2(z + f) - E_0f\}}{(v_{32})^5} \right. \\
 & \left. + \frac{30E_0\bar{X}^4zf(z + f)^2}{(v_{32})^7} \right] \\
 v_{31} = & \{\bar{X}^2(z - f)^2 + r^2\}^{1/2}, \quad v_{32} = \{\bar{X}^2(z + f)^2 + r^2\}^{1/2} \\
 & \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

上式の弾性定数を $a = d = (1 - \nu)E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $b = c = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $e = E / 2(1 + \nu) = G$ とすれば等方弾性体に対し Mindlin¹⁾が求めた第一解と一致する。

4. Mindlin (II) の解

半無限横等方弾性体内の一点に境界面と平行な集中力が作用する問題であり、 x 軸方向に力が働く場合を考えると、Kelvin 解は $X_1 \neq 0$, $X_2 = X_3 = 0$ が相当し、斉次解は H_1 , $K_3 = D_x K_3$ の 2 種のポテンシャルを用いれば解ける^{4,5)}。Mindlin (I) の問題と同じく斉次解に含まれるポテンシャルの未定係数を境界条件式より決定すれば、合成解と斉次解の重ね合わせで求める解を得ることができる。この場合の境界条件式は、弾性体表面 $z = 0$ で $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ である。(2) 式の一般解において、 $X_1 = P_x$, $X_2 = X_3 = 0$ とする変位より得られる Kelvin 解の応力式は $c + 2e > \sqrt{ad}$ の場合次式となる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} = & (-ce\Delta' + deD_z^2)D_xIX_1 \\
 = & \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty \left\{ \frac{(c + dc_1^2)e^{-c_1z\rho}}{c_1} \right. \\
 & \left. - \frac{(c + dc_2^2)e^{-c_2z\rho}}{c_2} \right\} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \left(\frac{x}{r} \right) \rho J_1(r\rho) d\rho \\
 \sigma_{zx} = & -e(e\Delta' + dD_z^2 - E_0D_x^2)D_zIX_1 + eD_yD_zIX_1 \\
 = & \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty \{ (e - dc_1^2)e^{-c_1z\rho} \\
 & - (e - dc_2^2)e^{-c_2z\rho} \} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \rho J_0(r\rho) d\rho \\
 & - \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty E_0(e^{-c_1z\rho} - e^{-c_2z\rho}) \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{x^2 \rho J_0(r\rho) - \frac{(x^2 - y^2)}{r} J_1(r\rho)\} d\rho \\
& - \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty \left[\frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_0^2\}e^{-c_0 z\rho}}{(c_0^2 - c_1^2)(c_0^2 - c_2^2)} \right. \\
& \left. - \frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_1^2\}e^{-c_1 z\rho}}{(c_0^2 - c_1^2)(c_1^2 - c_2^2)} + \frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_2^2\}e^{-c_2 z\rho}}{(c_0^2 - c_2^2)(c_1^2 - c_2^2)} \right] \\
& \cdot \left(\frac{y^2}{r^2}\right) \{\rho J_0(r\rho) - \frac{2}{r} J_1(r\rho)\} d\rho \\
\sigma_{zy} = & eE_0 D_x D_y D_z I X_1 - eD_x D_z J X_1 \\
= & \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty E_0 (e^{-c_1 z\rho} - e^{-c_2 z\rho}) \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2}\right) \left(\frac{xy}{r^2}\right) \cdot \\
& \left\{ -\rho J_0(r\rho) + \frac{2}{r} J_1(r\rho) \right\} d\rho \\
& + \frac{P_x}{4\pi d} \int_0^\infty \left[\frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_0^2\}e^{-c_0 z\rho}}{(c_0^2 - c_1^2)(c_0^2 - c_2^2)} \right. \\
& \left. - \frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_1^2\}e^{-c_1 z\rho}}{(c_0^2 - c_1^2)(c_1^2 - c_2^2)} + \frac{\{Ae - (Ad - E_0^2)c_2^2\}e^{-c_2 z\rho}}{(c_0^2 - c_2^2)(c_1^2 - c_2^2)} \right] \\
& \cdot \left(\frac{xy}{r^2}\right) \left\{ \rho J_0(r\rho) - \frac{2}{r} J_1(r\rho) \right\} d\rho \\
& \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

(16) 式を積分公式を使って初等関数で表し、 $(z-f)^{(*)}$ と $(z+f)^{(**)}$ に仮想外力 P_x が作用した時の合成解^(*)を求め境界面 $z=0$ の値を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} &= \sigma_{zz}^{*}|_{z=0} + \sigma_{zz}^{**}|_{z=0} \\
&= \frac{P_x}{2\pi d} \left\{ \frac{(c + dc_1^2)}{c_1} \frac{r}{(c_1^2 f^2 + r^2)^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(c + dc_2^2)}{c_2} \frac{r}{(c_2^2 f^2 + r^2)^{3/2}} \right\} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2}\right) \left(\frac{x}{r}\right) \\
\bar{\sigma}_{zx}|_{z=0} &= \sigma_{zx}^{*}|_{z=0} + \sigma_{zx}^{**}|_{z=0} = 0 \\
\bar{\sigma}_{zy}|_{z=0} &= \sigma_{zy}^{*}|_{z=0} + \sigma_{zy}^{**}|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

ここでもゼロとならない応力成分 $\bar{\sigma}_{zz} |_{z=0}$ に注目し、積分公式

$$\int_0^\infty e^{-c_1 f\rho} \rho J_1(r\rho) d\rho = \frac{r}{(c_1^2 f^2 + r^2)^{3/2}}$$

の關係を使えば、(17) の式の境界条件に必要な合成解は

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} = \frac{2P_x}{4\pi d} \int_0^\infty \left\{ \frac{(c + dc_1^2)}{c_1} e^{-c_1 f\rho} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{(c + dc_2^2)}{c_2} e^{-c_2 f\rho} \right\} \left(\frac{1}{c_1^2 - c_2^2}\right) \left(\frac{x}{r}\right) J_1(r\rho) d\rho \\
\bar{\sigma}_{zx}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zy}|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

となる。ゼロでない応力成分 $\bar{\sigma}_{zz} |_{z=0}$ の式は (16) 式の Kelvin 解において、 $z \rightarrow f$, $P_x \rightarrow 2P_x$ に置き換えたものと一致する。この關係は等方弾性体に対する Mindlin (II) の静的、動的問題を同じ解析方法で求めた既往の研究結果^{2,5)}でも成立しており、変位、応力の Kelvin 解が半無限積分の形でしか表示できない横等方弾性体の動的問題を解く場合、非常に便利な關係である。

次に、 $H_1 = H$, $K_3 = D_x K_3 = K$ とするポテンシャルを用いた斉次解は

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{***} &= \{(ad - cE_0)\Delta' + deD_z^2\} D_x D_z K \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{ (ad - cE_0 - dec_1^2) c_1 B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (ad - cE_0 - dec_2^2) c_2 B_2 e^{-c_2 z\rho} \} \cdot \\
&\quad \left(\frac{x}{r}\right) (\rho^5) J_1(r\rho) d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zx}^{***} &= e\{D_y^2 D_z H + (a\Delta' - cD_z^2) D_x^2 K\} \\
&= \left(\frac{e}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{ [c_0 B_5 y^2 e^{-c_0 z\rho} + (a + cc_1^2) x^2 \rho B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad + (a + cc_2^2) x^2 \rho B_2 e^{-c_2 z\rho}] \left(\frac{\rho^4}{r^2}\right) J_0(r\rho) \\
&\quad + \{c_0 B_5 e^{-c_0 z\rho} - (a + cc_1^2) \rho B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad - (a + cc_2^2) \rho B_2 e^{-c_2 z\rho}\} \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3}\right) (\rho^3) J_1(r\rho) \} d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zy}^{***} &= e\{-D_x D_y D_z H + (a\Delta' - cD_z^2) D_x D_y K\} \\
&= -\left(\frac{e}{2\pi}\right) \int_0^\infty \{ c_0 B_4 e^{-c_0 z\rho} - (a + cc_1^2) \rho B_1 e^{-c_1 z\rho} \\
&\quad - (a + cc_2^2) \rho B_2 e^{-c_2 z\rho} \} \left(\frac{xy}{r^2}\right) (\rho^3) \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \rho J_0(r\rho) - \frac{2}{r} J_1(r\rho) \right\} d\rho \\
& \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

となる。

以上の式より

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} + \sigma_{zz}^{***}|_{z=0} = 0 \\ \sigma_{zx}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zx}|_{z=0} + \sigma_{zx}^{***}|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (20) \\ \sigma_{zy}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zy}|_{z=0} + \sigma_{zy}^{***}|_{z=0} = 0\end{aligned}$$

の境界条件式を解いて未定係数 B_1 , B_2 , B_5 を求める

$$\begin{aligned}B_1 &= -\frac{(a+cc_2^2)P_x}{c_1c_2(c_1-c_2)^2(c_1+c_2)(ad-c^2)E_0\sqrt{ad}(\rho^4)}\{ \\ &\quad c_2(c+dc_1^2)e^{-c_1f\rho} - (c+dc_2^2)e^{-c_2f\rho}\} \\ B_2 &= -\frac{(a+cc_1^2)}{(a+cc_2^2)}B_1 \\ B_5 &= 0 \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

となり, Mindlin (II) の問題の解が求められることになる。そこで加力方向の変位 u_x を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{P_x}{4\pi de}\left(\frac{1}{c_1^2-c_2^2}\right)\left\{\frac{(e-dc_1^2)}{c_1}\left(\frac{1}{v_{10}}+\frac{1}{v_{11}}\right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{(e-dc_2^2)}{c_2}\left(\frac{1}{v_{20}}+\frac{1}{v_{22}}\right)\right\} \\ &\quad +\frac{P_x}{4\pi de^2}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left\{\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)c_0^2\}}{c_0(c_0^2-c_1^2)(c_0^2-c_2^2)}\left[\frac{1}{v_{01}}+\frac{1}{v_{02}}\right] \right. \\ &\quad \left. -\frac{2(v_{01}+v_{02}-2c_0z)}{r^2}\right. \\ &\quad \left. -\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)c_1^2\}}{c_1(c_0^2-c_1^2)(c_1^2-c_2^2)}\left[\frac{1}{v_{10}}+\frac{1}{v_{11}}\right] \right. \\ &\quad \left. -\frac{2(v_{10}+v_{11}-2c_1z)}{r^2}\right\} \\ &\quad +\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)c_2^2\}}{c_2(c_0^2-c_2^2)(c_1^2-c_2^2)}\left[\frac{1}{v_{20}}+\frac{1}{v_{22}}\right] \\ &\quad \left. -\frac{2(v_{20}+v_{21}-2c_2z)}{r^2}\right\} \\ &\quad +\frac{P_x}{2\pi(c_1-c_2)^2(c_1+c_2)(ad-c^2)E_0\sqrt{ad}}\left(\frac{x^2}{r^2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot\left\{(a+cc_2^2)(c+dc_1^2)\left(\frac{1}{v_{11}}-\frac{c_1}{c_2v_{12}}\right) \right. \\ &\quad \left. + (a+cc_1^2)(c+dc_2^2)\left(\frac{1}{v_{22}}-\frac{c_2}{c_1v_{21}}\right)\right\} \\ &\quad +\frac{P_x}{2\pi(c_1-c_2)^2(c_1+c_2)(ad-c^2)E_0\sqrt{ad}}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{2x^2}{r^2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot\left\{(a+cc_2^2)(c+dc_1^2)\{v_{11}-c_1(z+f)-\frac{c_1(v_{12}-c_1z-c_2f)}{c_2}\} \right. \\ &\quad \left. + (a+cc_1^2)(c+dc_2^2)\{v_{22}-c_2(z+f)-\frac{c_2(v_{21}-c_2z-c_1f)}{c_1}\}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ (a+cc_1^2)(c+dc_2^2)\{v_{22}-c_2(z+f)-\frac{c_2(v_{12}-c_1f-c_2z)}{c_1}\}\} \\ &\dots\dots\dots (22)\end{aligned}$$

$c+2e=\sqrt{ad}$ の場合は

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{P_x}{8\pi de\bar{X}^3}\{E_0\bar{X}^2\left\{\frac{(z-f)^2}{(v_{31})^3}+\frac{(z+f)^2}{(v_{32})^3}\right\} \\ &\quad - (c+3e)\left\{\frac{1}{(v_{31})^3}+\frac{1}{(v_{32})^3}\right\}\} \\ &\quad +\frac{P_x}{4\pi de^2(c_0^2-\bar{X}^2)}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left[\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)c_0^2\}}{c_0(c_0^2-\bar{X}^2)}\left(\frac{1}{v_{01}}+\frac{1}{v_{02}}\right) \right. \\ &\quad \left. +\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)\bar{X}^2\}}{2\bar{X}}\left\{\frac{(z-f)^2}{(v_{31})^3}+\frac{(z+f)^2}{(v_{32})^3}\right\} \right. \\ &\quad \left. +\frac{\{Ae(c_0^2-3\bar{X}^2)+(Ad-E_0^2)(c_0^2+\bar{X}^2)\bar{X}^2\}}{2\bar{X}^3(c_0^2-\bar{X}^2)}\left(\frac{1}{v_{31}}+\frac{1}{v_{32}}\right)\right] \\ &\quad -\frac{P_x}{4\pi de^2(c_0^2-\bar{X}^2)}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{2x^2}{r^2}\right)\left[\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)c_0^2\}}{c_0(c_0^2-\bar{X}^2)} \right. \\ &\quad \cdot\{v_{01}+v_{02}-2c_0z\} \\ &\quad -\frac{\{Ae-(Ad-E_0^2)\bar{X}^2\}}{2\bar{X}^2}\left\{\frac{\bar{X}(z-f)^2}{v_{31}}+\frac{\bar{X}(z+f)^2}{v_{32}}-2z\right\} \\ &\quad +\frac{\{Ae(c_0^2-3\bar{X}^2)+(Ad-E_0^2)(c_0^2-\bar{X}^2)\bar{X}^2\}}{2\bar{X}^3(c_0^2-\bar{X}^2)}\{v_{31}+v_{32}-2\bar{X}z\} \\ &\quad -\frac{E_0P_x}{8\pi de}\{c(\sqrt{ad}+E_0)\bar{X}^2+ae\}\bar{X}\left\langle\left(\frac{x^2}{r^2}\right)\left[\frac{4e^2}{v_{32}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. +\frac{\bar{X}^2\{2eE_0z-c(c+d)f\}(z+f)+4E_0^2\bar{X}^2zf}{(v_{32})^3}\right] \right. \\ &\quad \left. -\frac{12E_0^2\bar{X}^4zf(z+f)^2}{(v_{32})^5}\right] \\ &\quad +\left(1-\frac{2x^2}{r^2}\right)\left[\frac{4e^2\{v_{32}-\bar{X}(z+f)\}}{r^2} \right. \\ &\quad \left. +\frac{\bar{X}\{2eE_0z-c(c+d)f\}\{v_{32}-\bar{X}(z+f)\}}{r^2v_{32}}-\frac{4E_0^2\bar{X}^2zf}{(v_{32})^3}\right]\} \\ &\dots\dots\dots (23)\end{aligned}$$

この式に等方弾性体の条件を課せば Mindlin が求めた第二解と一致する。

5. まとめ

横等方弾性体の Mindlin 問題の解析法について Kelvin 解より得られる合成解と斉次解による境界条件式を半無限積分表示のままで求める方法を示した。調関数であるポテンシャルを用いた弾性問題の解析では、ポテンシャルに含まれる未定係数の決定を境界条件によ

って行く。積分変換法を利用する場合、最終的に逆変換の操作を行わなければならない。動的問題を解析する場合、逆変換が困難で境界条件式を初等関数で表示することができず、未定係数を求めることができない。本解析法はこの点を考慮したもので、合成解、斉次解とも半無限積分表示のままて解くことが可能であることを示した。基本解である Kelvin 解の変数 z を加力深さ f で置き換えた式を 2 倍したものと同じであることを利用する方法である。また、弾性定数間の関係より、等方性とした場合の解は Mindlin が求めた解と一致することも示した。

以上の結果、既往の等方弾性体の静的、動的 Mindlin 問題及び横等方弾性体の静的 Mindlin 問題が本解析方法によって解けたことから、動的 Kelvin 解を初等関数表示することが困難な横等方弾性体の動的 Mindlin 問題の解析もこの方法によれば容易に解析可能であると言える。求められた解も簡単な初等関数表示であり、他の応用問題に利用し易いものとなっている。

参 考 文 献

- 1) R. D. Mindlin : Force at a point in the Interior of a Semi-Infinite Solid, Physics, Vol. 7, pp. 195-202, 1936.
- 2) 木村 (最上監修) : 土質工学基礎叢書 5 (土の応力伝播), 鹿島出版会, pp. 49-64, 昭和 53 年.
- 3) 松岡・八幡 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 (その 1, 2, 3), 日本建築学会論文報告集, 第 288 号, pp. 73-84, 昭和 55 年 2 月, 第 293 号, pp. 35-44, 同 7 月, 第 298 号, pp. 43-53, 同 12 月.
- 4) 松岡・加藤 : Transversely-Isotropy の Bousinesq と Mindlin (I) の問題の解, 建築学会大会梗概集 (東海), pp. 925-926, 昭和 51 年 10 月.
- 5) 勅使川原・松岡 : 均質等方弾性体の動的 Mindlin の問題, 中部大学工学部紀要, 第 27 巻, pp. 73-80, 1991 年 12 月.
- 6) 松岡・勅使川原 : Transversely-Isotropy の集中荷重の問題 (その 1), 日本建築学会論文報告集, 第 256 号, pp. 7-14, 昭和 52 年 6 月.

- 1) R. D. Mindlin : Force at a point in the Interior