

球状物体の衝突により生じる梁の過渡振動 —両端支持された段付き梁に関する考察

坂田 敏行*, 神前 義雄**

Transient Vibrations of Beams Due to Collision of A Spherical Impactor —Considerations on Simply Supported Beams with Stepped Thickness

Toshiyuki SAKATA* and Yoshio KAMIMAE**

(Received May 26, 1995)

By using the numerical approach proposed by one of the authors for estimating transient vibrations of beams impacted by a spherical impactor, the transient vibration of simply supported beams with stepped thickness is numerically analyzed. Numerical calculations are carried out for a beam consisting of two parts with different thickness. First, it is made clear from the numerical calculations that the values estimated converge rapidly. Next, the effect of the beam shape on the transient vibration of the beam and impulse force between beam and impactor is discussed. Last, the effect of the initial speed of the impactor on the transient vibration of the beam and impulse force is discussed.

Keywords : Vibration, Transient Response, Shock, Nonlinear Vibration, Contact Problem, Vibration of Beam, Simply Supported Beam

1. 緒 言

梁は構造要素として重要であり、静的問題から動的問題まで幅広く研究されている。衝撃問題に限定しても多くの研究がなされてきた^{1)~8)}。例えば、文献(1)では鋼球の衝撃によって生じる粘弾性梁からの放射音について研究され、文献(2)では段付き片持ち梁の衝撃による動的応答が実験により明らかにされた。衝撃体と梁の衝突により生じる過渡振動を解析する場合には、衝撃体と梁の間に作用する衝撃力を如何に評価するかが重要である。文献(3)~(5)には、静荷重の場合に導かれたヘルツの接

触理論が衝撃荷重の場合にも接触機構として適用可能であることが報告されている。ヘルツの接触理論を用いて、文献(6)では片持ち梁の衝撃問題が、文献(7)では両端固定梁の衝撃問題が解析されている。しかしながら、不均質梁の衝撃問題の解析において、接触機構としてヘルツの接触理論を用いた研究は、著者の一人がその解析法を提案した文献(8)以外には見当たらない。

本研究では、文献(8)の方法を用いて数値計算を行い、鋼球が両端支持された段付き梁に衝突した結果生じる梁のたわみ、鋼球の変位、衝撃力の最大値の収束性を検討する。次に、梁の過渡振動に及ぼす梁の形状の影響を考察する。最後に、梁の過渡振動に及ぼす鋼球の初速度の影響を明らかにする。

*機械工学科(Department of Mechanical Engineering)

**機械工学専攻大学院学生(Graduate Student, Mechanical Engineering)

2. 数値計算法

数値計算法は文献(8)に詳述されているので、ここでは要点のみを簡単に説明する。

2.1 衝撃問題の基礎式

図1に示す長さ a の梁に、半径 R の球状物体が初速度 V_0 で衝突した場合の梁の運動方程式は、

$$L(y) + \rho A \ddot{y} = p \delta(x - x_p) \quad (1)$$

ただし、 $A(x)$ は梁の断面積、 p は球状物体と梁との間の衝撃力、 x_p は球状物体と梁の衝突位置の座標、 $y(x, t)$ は梁のたわみ、 $\rho(x)$ は梁材の密度、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数、“ $\cdot$ ” は時間 t による微分を示す。また、 $L(\cdot)$ は梁の静的曲げ問題の微分演算子であり、次式で表される。

$$L(\cdot) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \right] \quad (2)$$

ただし、 $D(x)$ は梁の曲げ剛性であり、梁材の弾性係数 $E(x)$ と断面の2次モーメント $I_z(x)$ の積である。

$$D = EI_z \quad (3)$$

一方、球状物体の質量を m 、変位を z とおけば、球状物体の運動方程式は Newton の運動の第2法則より、次式のようになる。

$$m \ddot{z} = -p \quad (4)$$

衝撃力 $p(t)$ は梁と球状物体との相対変位 δ_p の関数で与えられる。すなわち、

$$p = f(\delta_p) \quad (5)$$

衝突の前後における梁と球状物体との位置関係を図2の様に仮定すれば、 δ_p は次式で表される。

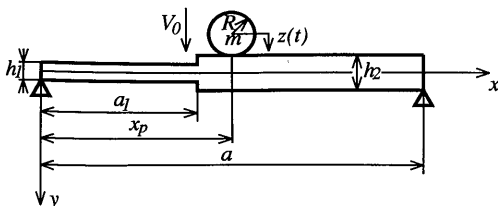


図1 解析系のモデルと座標系

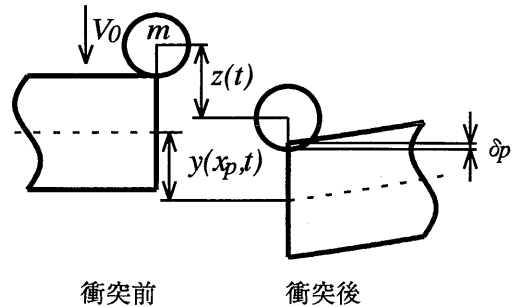


図2 衝突による相対変位

$$\delta_p(t) = z(t) - y(x_p, t) \quad (6)$$

球状物体と梁との衝突による接触機構としてヘツルの接触理論を用いると、式(5)は次式のようになる。

$$p = \begin{cases} n(\delta_p)^{1.5} & (\delta_p > 0) \\ 0 & (\delta_p \leq 0) \end{cases} \quad (7)$$

ただし、係数 n は次式で与えられる。

$$n = \frac{4\sqrt{R}}{3 \left[\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_R^2}{E_R} \right]} \quad (8)$$

ここで、 E_R は球状物体の弾性係数、 R は球状物体の半径、 ν_R は球状物体のポアソン比、 ν は梁材のポアソン比である。

2.2 離散化運動方程式

梁の静的曲げ問題のグリーン関数 $G(x, \xi)$ は式(9)および梁の境界条件を満足する。

$$L(G(x, \xi)) = \delta(x - \xi) \quad (9)$$

$G(x, \xi)$ を用いると、式(1)は式(10)のように積分方程式に変換される。

$$y(x, t) = p(t) G(x, x_p) - \int_0^a \rho(\xi) A(\xi) G(x, \xi) \ddot{y}(\xi, t) d\xi \quad (10)$$

図3に示すように、梁を長手方向に I 個に分割し、分割した微小領域の長さを Δx_i 、微小領域の代表点の座標を x_i とする。式(10)の被積分関数が微小領域内では一定であると仮定すると、式(10)は次の様になる。

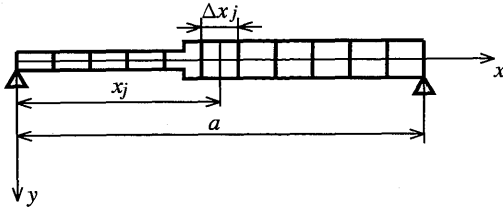


図3 梁の分割法

$$y(x, t) = p(t) G(x, x_p) - \sum_{j=1}^I \phi(x, x_j) \ddot{y}(x_j, t) \quad (11)$$

ただし、

$$\phi(x, x_j) = \rho(x_j) A(x_j) G(x, x_j) \Delta x_j \quad (12)$$

今 $x = x_i$ とおくと、梁の離散化運動方程式が次のように求められる。

$$y(x_i, t) = p(t) G(x_i, x_p) - \sum_{j=1}^I \phi(x_i, x_j) \ddot{y}(x_j, t) \quad (13)$$

$i=1, 2, 3, \dots, I$

2.3 静的曲げ問題のグリーン関数

両端支持された段付き梁の静的曲げ問題のグリーン関数は厳密解が求められる。梁の長さを a 、梁の衝撃点の座標を x_p とする。集中荷重が作用する段付き梁の曲げ問題では、段の位置 a_i と衝撃位置 x_p の位置関係により場合分けをして計算を行う必要がある。

(1) $a_1 \leq x_p$ の場合

単位荷重を $x = x_p$ に加えた時、任意の点 x における梁のたわみ y_k は次の様に表される。

$$y_k = A_k x^3 + B_k x^2 + C_k x + D_k \quad (14)$$

ただし、

$$\left. \begin{array}{ll} k=1 & (0 \leq x \leq a_1) \\ =2 & (a_1 < x \leq x_p) \\ =3 & (x_p < x \leq a) \end{array} \right\} \quad (15)$$

式(14)より、たわみ角 θ_k 、モーメント M_k 、せん断力 F_k はそれぞれ次の様に表される。

$$\theta_k = 3A_k x^2 + 2B_k x + C_k \quad (16)$$

$$M_k = -EI_{zj} (6A_k x + 2B_k) \quad (17)$$

$$F_k = -EI_{zj} 6A_k \quad (18)$$

ただし、 j の値により EI_z の値は下記に示す領域の値をとる。

$$\left. \begin{array}{l} j=1 \text{ のとき, 領域 } 0 \leq x \leq a_1 \text{ の } EI_z \\ =2 \text{ のとき, 領域 } a_1 < x \leq a \text{ の } EI_z \end{array} \right\} \quad (19)$$

境界条件は $x=0$ で、

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ M_1 = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

$x=a$ で、

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

また、連続の条件より、 $x=a_i$ で、

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \\ M_1 = M_2 \\ F_1 - F_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

$x=x_p$ で、

$$\left. \begin{array}{l} y_2 = y_3 \\ \theta_2 = \theta_3 \\ M_2 = M_3 \\ F_2 - F_3 = 1 \end{array} \right\} \quad (23)$$

式(20)～(23)より、係数 A_k 、 B_k 、 C_k 、 D_k が求められ、その値を式(14)に代入することにより、たわみ y_k が求まる。グリーン関数 $G(x, \xi)$ は $\xi = x_p$ の時のたわみ y_k である。すなわち、

$$G(x, x_p) = y_k \quad (24)$$

(2) $x_p \leq a_1$ の場合

(1) の場合と同様にグリーン関数を求めることができる。

3. 計算結果および考察

計算例としては、図 1 に示すように、厚さが h_1 と h_2 の 2 部分より構成される鉄製の段付き梁に鋼球が衝突する場合を解析した。梁の長さは $a=0.3\text{m}$ 、幅は $b=0.02\text{m}$ であり、梁の弾性係数は $E=2.058\times 10^{11}\text{Pa}$ 、密度は $\rho=7.8\times 10^3\text{kg/m}^3$ 、ポアソン比は $\nu=1/3$ とした。鋼球の弾性係数は $E_R=2.058\times 10^{11}\text{Pa}$ 、密度は $\rho_R=7.8\times 10^3\text{kg/m}^3$ 、ポアソン比は $\nu_R=1/3$ とした。

3.1 計算値の収束性

半径 $R=0.01\text{m}$ の鋼球が初速度 $V_0=1.0\text{m/s}$ で梁の中央に衝突した場合を解析した(すなわち、 $x_p=0.15\text{m}$)、梁の厚さは $h_1=0.003\text{m}$ 、 $h_2=0.005\text{m}$ 、段付き部の位置は $a_1=0.1\text{m}$ である。図 4 は計算結果を示す。図中の実線は衝撃力 $p(t)$ を、点線は鋼球の変位 $z(t)$ を、破線は梁のたわみ $y(x_p, t)$ を表す。また、横軸は時間 t を梁の基本周期 T で無次元化した値である。図では判読が困難であるが、衝突の瞬間に約 900N の衝撃力が生じ、次に、 $t/T=0.25$ を過ぎた位置で再度衝突が生じている。この例では 2 度の衝突しか生じていないが、衝突の条件により、頻繁な多重衝突が生じる場合もある。衝撃力、梁のたわみおよび鋼球の変位の最大値をそれぞれ $P_{\max}$ 、 $y_{\max}$ 、 $z_{\max}$ で表す。 $P_{\max}$ 、 $y_{\max}$ 、 $z_{\max}$ の収束性に及ぼす梁の長手方向の分割数 I の影響を表 1 に、時間刻み Δt の影響を表 2 に示す。表 1 および 2 の収束状況より、本研究では $I=33$ 、 $\Delta t=T/5000$ として計算を行った。

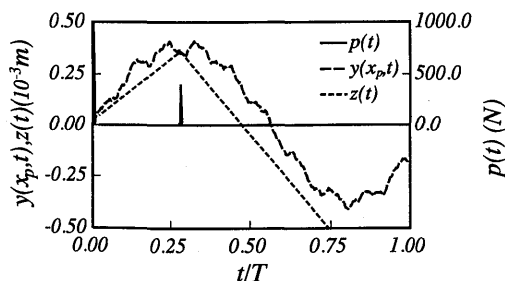


図 4 数値計算例

$$h_1=0.003\text{m}, h_2=0.005\text{m}, a_1=0.1\text{m}, \\ x_p=0.15\text{m}, V_0=1.0\text{m/s}, R=0.01\text{m}$$

3.2 梁の厚さ比 h_2/h_1 の影響

衝撃力およびたわみに及ぼす梁の厚さ比 h_2/h_1 の影響を調べるために、梁の厚さを $h_1=0.003\text{m}$ と一定にし、 $h_2=0.005\text{m}$ 、 0.010m 、 0.015m 、 0.020m と 4 種類に変化させて計算を行った。鋼球の半径は $R=0.01\text{m}$ とし、初速度は $V_0=1.0\text{m/s}$ である。鋼球と梁との最初の衝突における衝撃力の時間変化を図 5(a) に、梁の衝撃点のた

表 1 計算結果に及ぼす梁の分割数 I の影響

$$h_1=0.003\text{m}, h_2=0.005\text{m}, a_1=0.1\text{m}, \\ x_p=0.15\text{m}, V_0=1.0\text{m/s}, R=0.01\text{m}, \\ \Delta t=T/5000$$

I	$p_{\max} (10^3\text{N})$	$z_{\max} (10^{-3}\text{m})$	$y_{\max} (10^{-3}\text{m})$
15	0.929	0.380	0.420
21	0.897	0.364	0.424
27	0.906	0.362	0.415
33	0.906	0.361	0.410
39	0.907	0.361	0.409
45	0.907	0.361	0.409
51	0.907	0.361	0.409

表 2 計算結果に及ぼす時間刻み Δt の影響

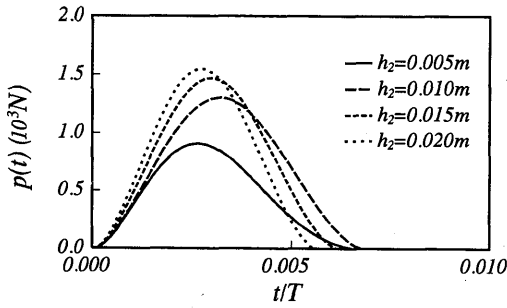
$$h_1=0.003\text{m}, h_2=0.005\text{m}, a_1=0.1\text{m}, \\ x_p=0.15\text{m}, V_0=1.0\text{m/s}, R=0.01\text{m}, \\ I=45$$

$T/\Delta t$	$p_{\max} (10^3\text{N})$	$z_{\max} (10^{-3}\text{m})$	$y_{\max} (10^{-3}\text{m})$
1000	0.874	0.355	0.422
2000	0.907	0.361	0.424
3000	0.904	0.361	0.419
4000	0.907	0.361	0.412
5000	0.907	0.361	0.409
6000	0.907	0.361	0.409
7000	0.907	0.361	0.409
8000	0.907	0.361	0.409
9000	0.907	0.361	0.409
10000	0.907	0.361	0.409

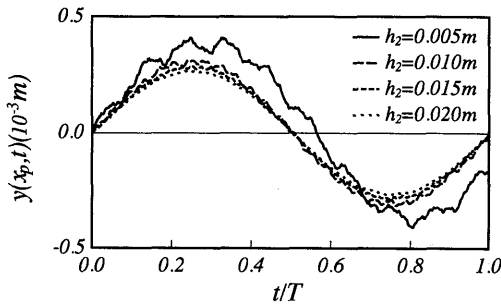
わみを図 5(b) に示す。ただし $a_1/a=1/3$ である。計算に用いた衝突条件の場合には、厚さ h_2 が 0.01m 以上では衝撃力および梁のたわみともに大きく変化しないことが明らかになった。最大たわみ時の梁のたわみ形状を図 5(c) に示す。 h_2 が小さい場合には衝撃点(梁の中央)付近で最大たわみが生じるが、 h_2 が大きくなると、最大たわみの位置は厚さの薄い部分に移動する。

3.3 段付き位置 a_1/a の影響

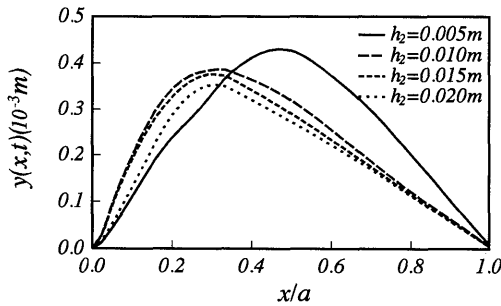
鋼球と梁の衝突に及ぼす、梁の段付き位置 a_1/a の影響を調べるために、厚さ $h_1=0.003\text{m}$ 、 $h_2=0.01\text{m}$ の鉄製梁に半径 $R=0.01\text{m}$ の鋼球が初速度 $V_0=1.0\text{m/s}$ で衝突する場合を解析した。最初の衝突における衝撃力に及ぼす段付き位置の影響を図 6(a) に、たわみに及ぼす段付き位置の影響を図 6(b) に示す。段付き位置が $a_1/a=3/5$ 以上の場合には衝撃力がほぼ等しくなっている。図 6(c) は最大たわみ時のたわみ形状を示す。



(a) 衝撃力への影響



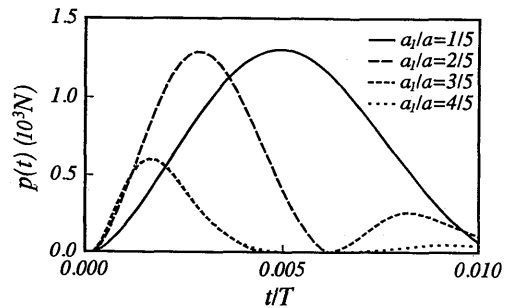
(b) 衝撃点でのたわみへの影響



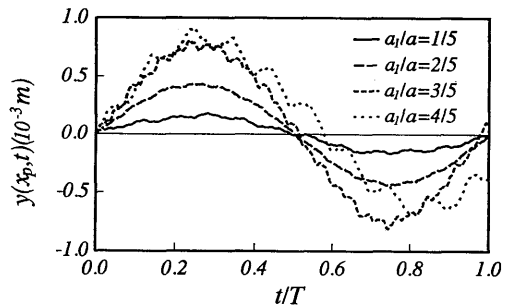
(c) 梁のたわみ形状への影響

図5 梁の厚さ比 h_2/h_1 の影響

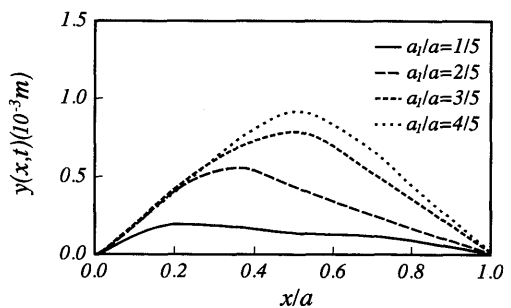
$h_1=0.003\text{m}$, $a_1=0.1\text{m}$, $x_p=0.15\text{m}$,
 $V_0=1.0\text{m/s}$, $R=0.01\text{m}$



(a) 衝撃力への影響



(b) 衝撃点でのたわみへの影響



(c) 梁のたわみ形状への影響

図6 段付き位置 a_1/a の影響

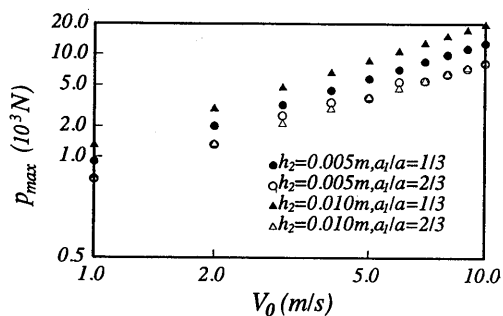
$h_1=0.003\text{m}$, $h_2=0.01\text{m}$, $x_p=0.15\text{m}$,
 $V_0=1.0\text{m/s}$, $R=0.01\text{m}$

3.4 鋼球の初速度 V_0 の影響

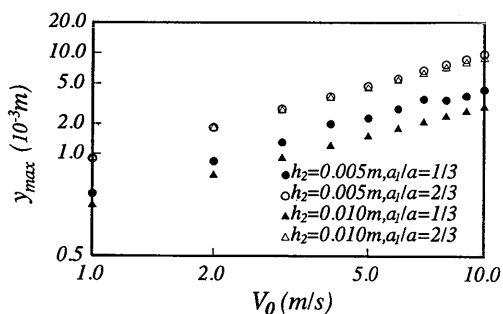
半径 $R=0.01\text{m}$ の鋼球の初速度 V_0 を変化させて計算を行った。鉄製の梁の厚さ h_1 は 0.003m と一定とし、 h_2 および a_1 を変化させた。図7(a)は衝突後の最初の衝撃力に及ぼす初速度の影響を、図7(b)は衝撃点の最大たわみに及ぼす初速度の影響を示す。これらの図は、衝撃荷重、最大たわみのいずれに対しても、初速度の影響が極めて大きいことを示している。

4. 結論

両端支持された段付き梁に鋼球が衝突する場合の梁の過渡振動を計算した。本計算例の場合には、静的曲げ問題のグリーン関数は簡単に厳密解を求めることが可能であるため、衝撃力、梁の曲げたわみともに収束性の良い解が得られた。数値計算例では梁の厚さ比、段付き位置、および鋼球の初速度の影響を検討したが、いずれも妥当と考えられる結果が得られた。



(a) 衝撃力への影響



(b) 衝撃点でのたわみへの影響

図7 銅球の初速度 V_0 の影響

$h_1=0.003\text{m}$, $x_p=0.15\text{m}$, $R=0.01\text{m}$

参考文献

- 1) 坂田・木村, 機論, 48-436, C (昭 57), 1889.
- 2) 神宮・根津・坂本, 機論, 54-499 (昭 63), 539.
- 3) Doyle, J. F., Experimental Mechanics, 24-3 (1984), 10.
- 4) Doyle, J. F., Experimental Mechanics, 24-12 (1984), 265.
- 5) Doyle, J. F., Experimental Mechanics, 24-3 (1987), 68.
- 6) 松本他 3 名, 機論, 52-477, A (昭 61), 1423.
- 7) 松井・吉田・坂田, 機論, 59-565, C (平 5), 65.
- 8) Sakata, T., Proc. of Asia Vibration Conference '89, (1989), 209.