

スキー板の静的曲げ変形解析 ——数値計算結果と実験結果の比較

坂田 敏行*, 田川 敏成**

Static Bending Analysis of A Ski ——A Comparison between Numerical and Experimental Results

Toshiyuki SAKATA* and Toshinari TAGAWA**

(Received May 24, 1993)

Recently, many studies on skiing have been carried out from various standpoints. Although a reacting force acting on a ski from snow is considered to effect strongly on skiing, one can find no other reports besides the authors'. In one of reports the authors proposed a numerical approach for analyzing vertical displacement and bending deformation of the ski, and the reacting force from the snow when vertical force and bending moment act on the shoe center of the ski resting on the snow. Furthermore, it was made clear that one can obtain qualitatively agreeable numerical results for some skis sold in the market by using the approach.

In the present paper, it has been attempted to prove quantitatively the justification of the numerical approach. Since it is difficult to make an experiment on bending deformation of the ski resting on the snow, an urethan sheet is used instead of the snow. Vertical displacement of the ski is measured and compared with numerical ones. Two kinds of load condition are investigated. One of them is that just vertical force acts on the shoe center of the ski, and another is that vertical force and bending moment act synchronously on the shoe center of the ski. It follows that numerical results agree very well with experimental ones in each case.

1. 緒 言

近年、スポーツ工学に関する研究が盛んに行われるようになり、スキー滑走に関しても様々な面から研究が行われている。しかしながら、スキー板に及ぼす雪面からの反力はスキー滑走に大きな影響を与えると考えられるが、この反力に関する研究は著者らの報告⁽¹⁾⁻⁽³⁾以外に公表されていない。

文献(1)では、雪面を弾性床と仮定し、水平な弾性床上

に静止しているスキー板に垂直外力が静的に作用した場合のスキー板の垂直変位、曲げ変形およびスキー板に作用する弾性床からの反力を解析するための数値計算法を提案した。また、市販されているスキー板を測定して得られた、線密度、曲げ剛性、キャンバー高さ等を用いて数値計算を行い、定性的には妥当な結論を得た。しかし、数値計算結果の定量的な検討は行われていない。

本研究では、文献(1)で提案した数値計算法の妥当性を定量的に明らかにする。実際の雪面上での実験は困難であるため、雪面の代わりにウレタン製マットを用いて実験を

*機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

**名古屋第一高等学校 (Nagoya Daiichi High School)

行い、スキー板のシューズセンターに垂直荷重のみが作用する場合と、垂直荷重と曲げモーメントが同時に作用する場合とについて実験結果と計算結果を比較検討する。

また、軟らかい雪面上に静止しているスキー板に垂直荷重、曲げモーメント等が作用する場合には、キャンパー高さに及ぼす重力の影響を無視できない場合のあることも明らかにする。

2. 数値計算法

数値計算法は文献(1)に詳述したので、ここでは、実験結果と計算結果とを比較するために必要な事項と、ウレタン製マットを雪面の代わりに用いるために必要となる計算方法の変更部分とについてのみ説明する。

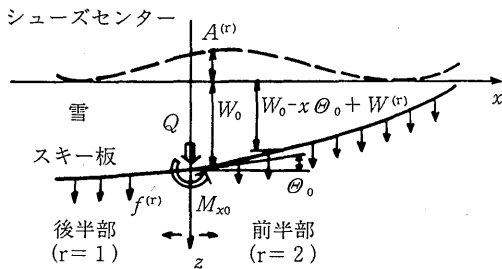


図1 数値解析モデル

図1に示すように、水平な雪面上に静止したスキー板を考える。雪面上、スキー板の長手方向に x 軸をとり、トップ側を正とする。スキー板のシューズセンターを通り x 軸に垂直向下向きに z 軸をとる。シューズセンターでスキー板を二分し、後半部を数字の“1”で、前半部を数字の“2”で表す。スキー板のシューズセンターには金具を通してスキーヤーから垂直荷重 Q 、曲げモーメント M_{x0} が作用する。さらに、スキー板には、雪面からの反力と重力の和である分布力 $f^{(r)}$ も作用する。スキー板にはキャンパー高さがあるので、垂直荷重、曲げモーメントおよび分布力が零の場合にはスキー板は図の破線のような形状をしているが、曲げ変形の計算ではスキー板を不均質真直梁と考え、 x 軸上に静止していると仮定する。荷重および曲げモーメントの作用により、スキー板は垂直方向の変位 W_0 、シューズセンター回りの回転 θ_0 を行うとともに、曲げたわみ $W^{(r)}$ を生じ、図の実線のように変形すると考える。その結果、スキー板の変位 $\Delta_w^{(r)}$ 、スキー板の雪面からの高さ(スキー板の変形形状をも示すが) $\Delta_p^{(r)}$ 、および雪面の変形量 $\Delta_s^{(r)}$ はそれぞれ次のように表される。

$$\Delta_w^{(r)} = W_0 - x\theta_0 + W^{(r)} \quad (1)$$

$$\Delta_p^{(r)} = \Delta_w^{(r)} - A^{(r)} \quad (2)$$

$$\Delta_s^{(r)} = \Delta_p^{(r)} \quad (\Delta_w^{(r)} > A^{(r)}) \\ = 0 \quad (\Delta_w^{(r)} \leq A^{(r)}) \quad (3)$$

ただし、 $A^{(r)}$ はスキー板のキャンパー高さである。

スキー板は厳密には真直梁ではないが、曲げ変形の数値計算では真直梁と仮定して解析を行う。スキー板の曲げ変形の基礎式は次式で表される。

$$L^{(r)}[W^{(r)}] = f^{(r)} \quad (r=1,2) \quad (4)$$

ここで、 $L^{(r)}[\]$ は不均質梁の静的曲げ問題の微分演算子であり、スキー板の曲げ剛性を $EI^{(r)}$ とすれば、次式で表される。

$$L^{(r)}[\] = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI^{(r)} \frac{d^2}{dx^2} [\] \right) \quad (5)$$

また、外力 $f^{(r)}$ はスキー板に作用する重力 $f_1^{(r)}$ 、雪面からの反力 $f_2^{(r)}$ の合力であり、次のように表される。

$$f^{(r)} = f_1^{(r)} - f_2^{(r)} \quad (6)$$

$$f_1^{(r)} = \gamma^{(r)}g \quad (7)$$

ただし、 g は重力加速度、 $\gamma^{(r)}$ はスキー板の線密度である。

雪面上で精度のよい実験を行うことは非常に困難であるため、雪面の代わりにウレタン製マットを用いて実験を行った。実験に用いたウレタン製マットの荷重 P と変位 δ の関係を測定した結果、二本の直線で近似できる事が明らかになった(図2参照)。従って、マットからスキー板に作用する反力 $f_2^{(r)}$ は次のように表される。

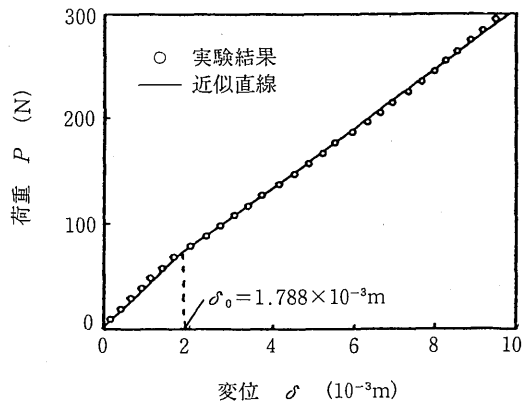


図2 ウレタン製マットの荷重-変位関係

$$\left. \begin{aligned} f_2^{(r)} &= k_2^{(r)} \Delta_s^{(r)} + (k_1^{(r)} - k_2^{(r)}) \delta_0 & (\Delta_s^{(r)} \geq \delta_0) \\ &= k_1^{(r)} \Delta_s^{(r)} & (0 < \Delta_s^{(r)} < \delta_0) \\ &= 0 & (\Delta_s^{(r)} \leq 0) \end{aligned} \right\} (8)$$

ただし、 δ_0 は図2に示す二本の直線の交点の変位である。また、 $k_1^{(r)}$ は $0 < \delta = \Delta_s^{(r)} < \delta_0$ の場合のばね係数、 $k_2^{(r)}$ は $\delta = \Delta_s^{(r)} \geq \delta_0$ の場合のばね係数であり、図2より求めたそれぞれの直線の勾配にスキー板の幅を掛けた値である。

スキー板の境界条件は、原点($x=0$)では固定、両端($x=\ell^{(r)}$)では自由であり、次式で表される。

$$W^{(r)} = \frac{dW^{(r)}}{dx} = 0 \quad (x=0) \quad (9)$$

$$M_x^{(r)} = V_x^{(r)} = 0 \quad (x=\ell^{(r)}) \quad (10)$$

ただし、 $M_x^{(r)}$ は曲げモーメント、 $V_x^{(r)}$ はせん断力である。

スキー板をシューズセンター(座標原点)で二分して解析を行っているので、スキー板に作用する垂直力の平衡条件式(11)およびモーメントの平衡条件式(12)を満足する必要がある。

$$\int f^{(r)} dx + Q = 0 \quad (11)$$

$$\int f^{(r)} x dx - M_{x0} = 0 \quad (12)$$

ただし、積分はそれぞれの領域内で行う。

式(4)、(11)および(12)を文献(1)と類似の方法で解くことにより、スキー板に作用する雪面からの反力、スキー板の垂直変位および曲げ変形を求めることができる。

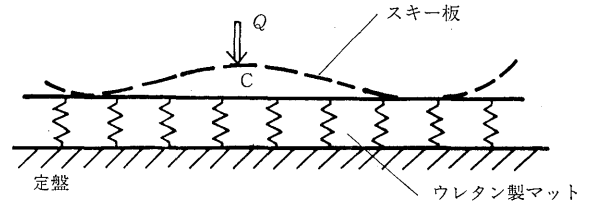
3. 実験装置および実験方法

図3に示すように、水平な剛体床面上に厚さ0.04mのウレタン製マットを敷き、その上に実験用のスキー板を置いた。ウレタン製マットの荷重-たわみ関係は図2に示すように二本の直線で近似できるが、それぞれの直線の勾配およびその交点のたわみ δ_0 の実測値は次のように求められた。

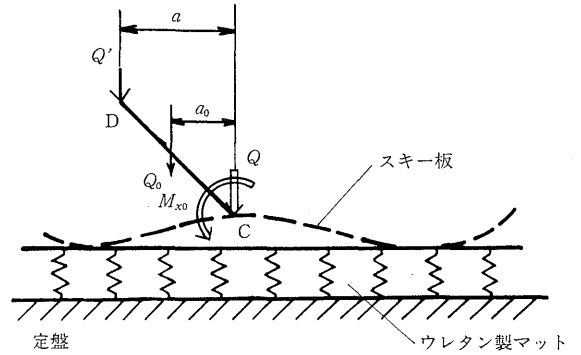
$$\begin{aligned} \text{直線の勾配} & \quad 3.943 \times 10^6 \text{ N/m}^3 \quad (0 \leq \delta \leq \delta_0) \\ & \quad 2.847 \times 10^6 \text{ N/m}^3 \quad (\delta \geq \delta_0) \end{aligned}$$

$$\text{交点の座標} \quad \delta_0 = 1.788 \times 10^{-3} \text{ m}$$

スキー板に垂直荷重のみを作用させる場合には、垂直荷重 Q を直接シューズセンターに加えた(図3(a)参照)。また、垂直荷重と曲げモーメントを同時に作用させる場合には、シューズセンターに金具CDを取り付け(図3



(a) 垂直荷重 Q のみが作用する場合



(b) 垂直荷重 Q と曲げモーメント M_{x0} が同時に作用する場合

図3 実験装置の概要

(b)参照)、D点に垂直荷重 Q' を作用させることにより、シューズセンターに垂直荷重 Q と曲げモーメント M_{x0} が同時に作用するようにした。本実験で用いた金具のD点に垂直荷重 Q' を作用させた場合には、 Q および M_{x0} は次式により求められる。

$$Q = Q' + 18.91 \quad [\text{N}] \quad (13)$$

$$M_{x0} = 0.152 Q' + 2.875 \quad [\text{Nm}] \quad (14)$$

スキー板の変位は定盤に固定したダイヤルゲージで測定した。

4. 数値計算結果と実験結果の比較

数値計算結果と実験結果の比較は、荷重および曲げモーメントを作用させない状態でのダイヤルゲージの読みと、荷重および曲げモーメントを作用させた場合のダイヤルゲージの読みとの差(すなわち、相対変位)を用いて行った。本論文では相対変位を下記のように表す。

A) 垂直荷重のみが作用するとき

$$[\Delta_w^{(r)}]_Q - [\Delta_w^{(r)}]_{Q=0}$$

B) 垂直荷重と曲げモーメントが同時に作用するとき

$$[\Delta_w^{(r)}]_{Q'} - [\Delta_w^{(r)}]_{Q'=0}$$

4.1 実験用スキー板

本研究に用いたスキー板の全長は $\ell = 1.95\text{m}$ 、全質量は $m = 1.80\text{kg}$ である。また、スキー板の線密度 $\gamma^{(r)}$ 、曲げ剛性 $EI^{(r)}$ 、キャンパー高さ $A^{(r)}$ および幅 $B^{(r)}$ を図4に示す。

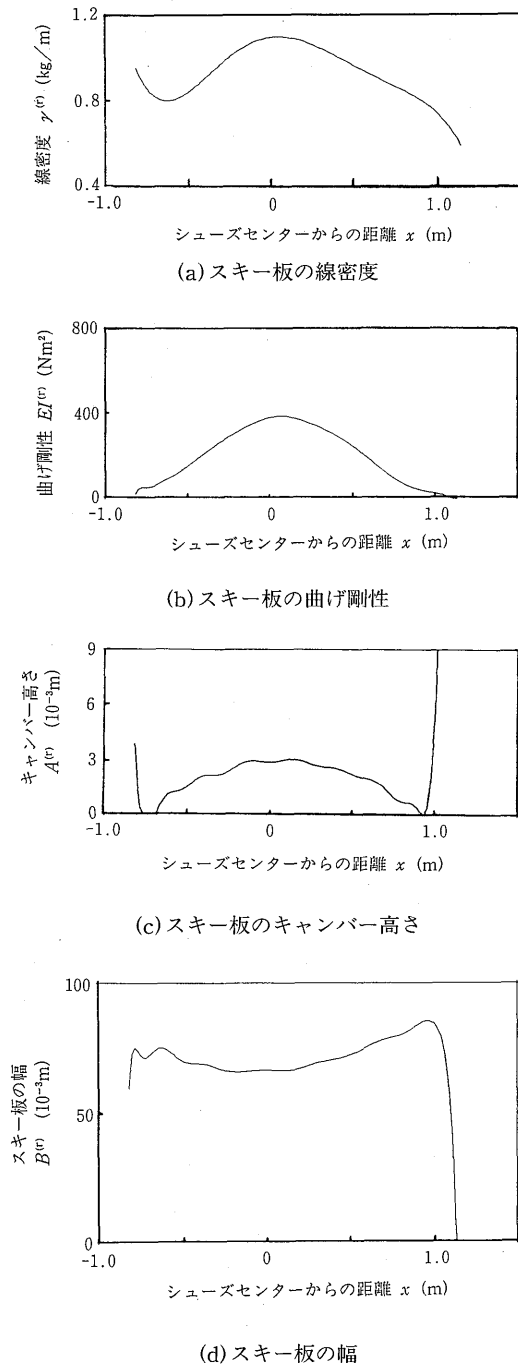


図4 スキー板の機械特性および形状

4.2 キャンパー高さの補正

スキー板は自重により曲げ変形を生じるため、水平な剛体床面上において測定した従来のキャンパー高さは「真のキャンパー高さ」ではない。本研究では、次のようにしてキャンパー高さの補正を行った。実際に測定したキャンパー高さを第1次近似値とし、その値を用いて求めたスキー板の曲げたわみを第1次近似値に加えた値を第2次近似値とした。第3次近似値以降は、第 $(n-1)$ 次近似値を用いて新たに計算した曲げたわみと前回の曲げたわみとの差を、第 $(n-1)$ 次の近似値に加えることによりキャンパー高さの第 n 次近似値とした。以上の計算を繰り返すことにより得られる収束値を「真のキャンパー高さ」とした。キャンパー高さの補正の一例を表1に示す。

この例では、第4次近似値ではほぼ収束していることがわかる。図5は、キャンパー高さの補正前（破線）および補正後（実線）の比較を示す。本計算例の場合には、キャンパー高さの補正値の最大値は約3mmであることがわかる。

次に、キャンパー高さの補正がスキー板の相対変位の計算値に及ぼす影響を検討した。図4に示す形状および機械特性を有するスキー板のシューズセンターに垂直荷重 $Q = 682\text{N}$ を作用させたときのスキー板の相対変位、

$$[\Delta_W^{(r)}]_{Q=682} - [\Delta_W^{(r)}]_{Q=0}$$

の実験結果と計算結果の比較を図6に示す。○印は実験結果を、実線は「真のキャンパー高さ」を用いて計算し

表1 キャンパー高さの補正結果

シューズセンターからの距離 x (m)	キャンパー高さ $A^{(r)}$ の近似値 (10^{-3}m)				
	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
-0.814	3.774	3.505	3.378	3.408	3.473
-0.667	0.521	0.872	1.239	1.363	1.425
-0.456	1.880	3.104	3.913	4.115	4.173
-0.260	2.495	4.336	5.321	5.559	5.612
-0.065	2.825	5.024	6.077	6.332	6.381
0.045	3.029	5.319	6.372	6.630	6.676
0.227	2.764	5.025	6.026	6.279	6.321
0.432	2.302	4.253	5.121	5.351	5.389
0.636	1.901	3.229	3.870	4.057	4.090
0.841	0.812	1.237	1.492	1.586	1.615
1.045	21.022	20.456	20.171	20.095	20.119
1.136	69.447	68.536	68.026	67.864	67.887

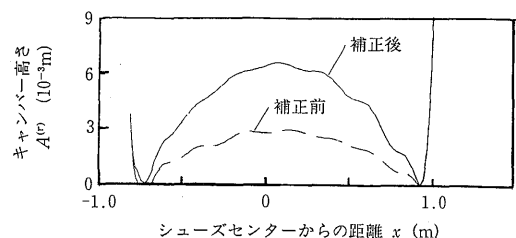


図5 補正前および補正後のキャンパー高さの比較

た結果を、破線は補正前のキャンバー高さをを用いて計算した結果を示す。図より、「真のキャンバー高さ」を用いて計算した値は実験値とよく一致していることが明らかである。図6の結果より、床面が軟らかい場合には「真のキャンバー高さ」を用いて計算を行う必要があると考えられる。

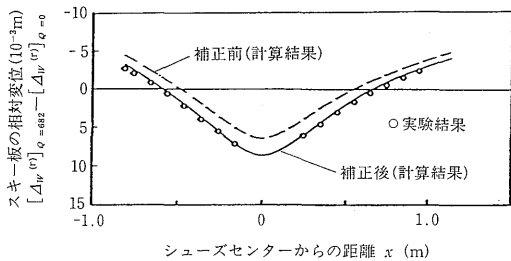


図6 スキー板の相対変位に及ぼすキャンバー高さの影響 ($Q=682\text{N}$)

4.3 垂直荷重のみによるスキー板の相対変位の比較

スキー板のシューズセンターに垂直荷重 Q を作用させたときのスキー板の相対変位,

$$[\Delta w^{(r)}]_Q - [\Delta w^{(r)}]_{Q=0},$$

の実験結果と計算結果の比較を図7および図8に示す。

図7は、図4に示す形状および機械特性を有するスキー板に三種類の垂直荷重 $Q=482\text{N}$ (●印), $Q=682\text{N}$ (○印) および $Q=798\text{N}$ (+印) を作用させた場合の実験結果を示す。また、計算結果はいずれの荷重の場合も実線で示す。図8は、図4に示すスキー板とは異なる二種類のスキー板に垂直荷重 $Q=682\text{N}$ を作用させた場合の相対変位の実験結果 (○印) と計算結果 (実線) を示す。いずれの場合にも実験結果と計算結果はよい一致を示している。

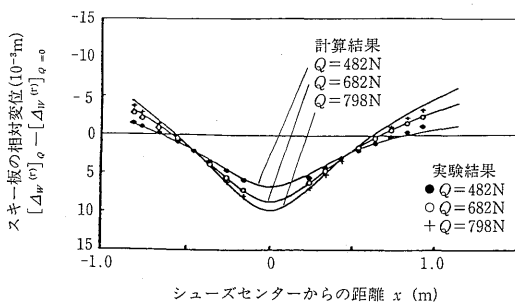
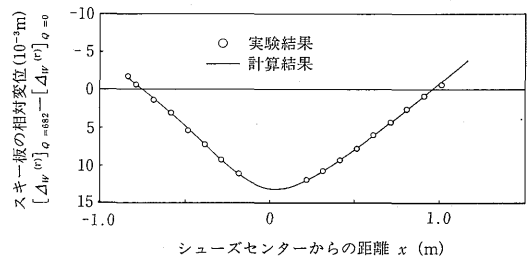
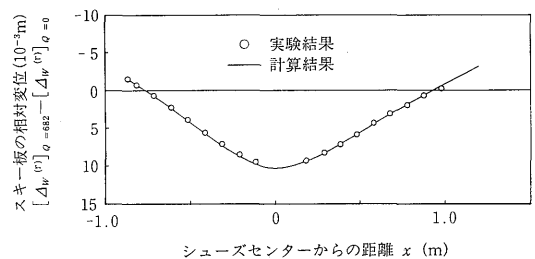


図7 垂直荷重のみが作用する場合の実験結果と計算結果の比較



(a) 長さ $l=2.01\text{m}$, 質量 $m=1.79\text{kg}$ のスキー板



(b) 長さ $l=2.07\text{m}$, 質量 $m=1.95\text{kg}$ のスキー板

図8 垂直荷重のみが作用する場合の実験結果と計算結果の比較 ($Q=682\text{N}$)

4.4 垂直荷重と曲げモーメントが同時に作用する場合のスキー板の相対変位の比較

図3に示すように、スキー板に金具CDを固定し、点Dに垂直荷重 Q' を作用させた場合のスキー板の相対変位,

$$[\Delta w^{(r)}]_{Q'} - [\Delta w^{(r)}]_{Q'=0},$$

の計算結果と実験結果との比較を図9および図10に示す。図中○印および●印は実験結果を、実線は計算結果を示す。点Dに垂直荷重 Q' を加えることにより、スキー板のシューズセンターには式(13)および(14)で与えられる垂直荷重 Q および曲げモーメント M_{x0} が同時に作用する。

図9は曲げモーメントの値が正になるように荷重した

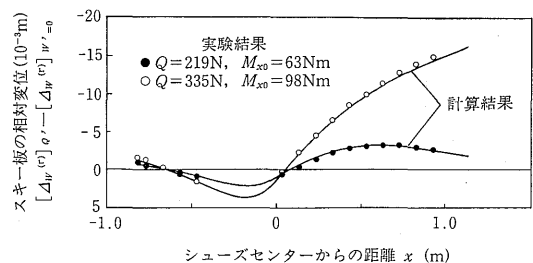


図9 垂直荷重と正の曲げモーメントが同時に作用する場合の実験結果と計算結果の比較

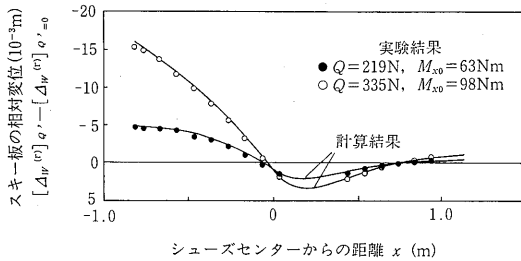


図10 垂直荷重と負の曲げモーメントが同時に作用する場合の実験結果と計算結果の比較

(すなわち、図3 (b)に示すように金具を取り付けた)場合の結果であり、図10は曲げモーメントの値が負になるように荷重した(すなわち、点Dが点Cよりもトップ側になるように図3 (b)とは反対向きに金具を取り付けた)場合の結果である。曲げモーメントが正の場合は後傾姿勢に対応し、曲げモーメントが負の場合には前傾姿勢に対応する。図9および図10より明らかなように、曲げモーメントが正の場合も負の場合も、実験結果と計算結果はよく一致している。

5. スキー板の変形形状および雪面からの反力

図2に示す荷重-変位関係を有するウレタン製マットの上に静止しているスキー板のシューズセンターに垂直荷重のみが、あるいは垂直荷重と曲げモーメントが同時

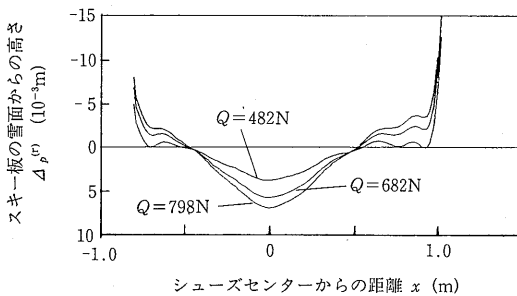
に作用する場合のスキー板の形状および雪面からの反力を計算した。スキー板の機械特性および形状としては図4に示す値を用いた。

5.1 垂直荷重のみが作用する場合

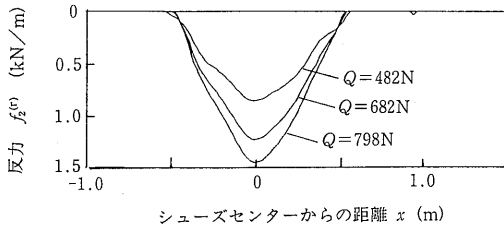
図11(a)および(b)は垂直荷重のみが作用する場合のスキー板の変形形状および雪面からの反力をそれぞれ示す。荷重が小さい場合にはトップ近傍およびテール近傍を除いて雪面とスキー板は接触しているが、垂直荷重が大きくなるにつれてスキー板の中央部分のみが雪面と接触するようになる。また、垂直荷重が大きくなるにつれて、反力の作用域は中央部分のみになり、その最大値は大きくなる。

5.2 垂直荷重と曲げモーメントが同時に作用する場合

図12は垂直荷重 Q と正の曲げモーメント M_{x0} が同時に作用する場合の計算結果を示す。図(a)はスキー板の変形形状を示す。曲げモーメントが大きくなると、スキー板の後半部は雪面と接しているが、前半部は雪面から離れるようになる。図(b)は雪面からスキー板に作用する反力を示す。図13は垂直荷重 Q と負の曲げモーメント M_{x0} が同時に作用する場合の計算結果を示す。図12の場合とは逆に、曲げモーメントが大きくなると、スキー板の前半部は雪面と接しているが、後半部は雪面から離れるようになる。

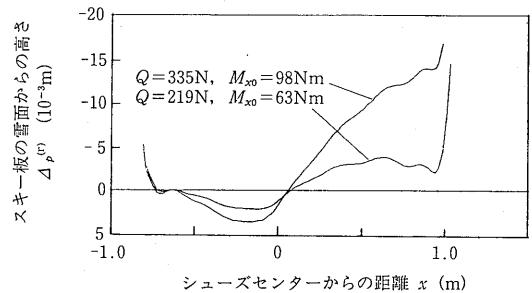


(a) スキー板の変形形状

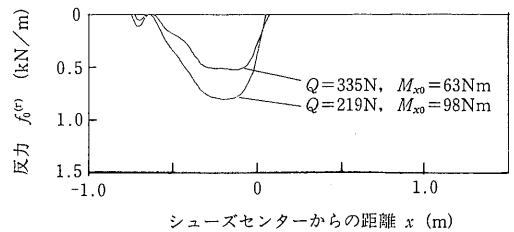


(b) スキー板に作用する雪面からの反力

図11 垂直荷重のみが作用する場合の計算結果

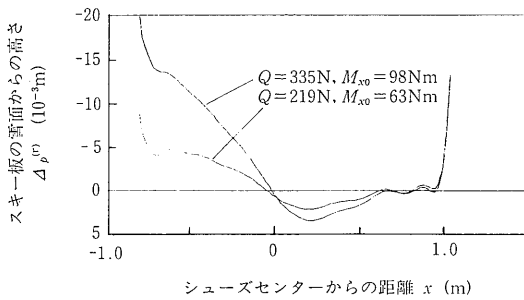


(a) スキー板の変形形状

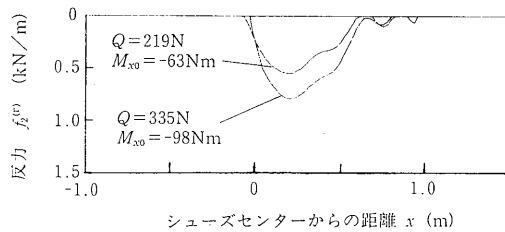


(b) スキー板に作用する雪面からの反力

図12 垂直荷重と正の曲げモーメントが同時に作用する場合の計算結果



(a) スキー板の変形形状



(b) スキー板に作用する雪面からの反力

図13 垂直荷重と負の曲げモーメントが同時に作用する場合の計算結果

6. 結 論

雪面の代わりに用いたウレタン製マット上に静止しているスキー板のシューズセンターに垂直荷重および曲げモーメントが静的に作用した場合に生じるスキー板の垂直方向変位を測定し、数値計算結果と比較した。垂直荷重のみが作用する場合と、垂直荷重と曲げモーメントが同時に作用する場合を検討したが、いずれの場合も実験結果と数値計算結果はよく一致し、数値計算法の妥当性が定量的に明らかになった。したがって、本研究で検討した数値計算法を用いて、スキー板の垂直変位、シューズセンターまわりの回転、曲げ変形および雪面からスキー板に作用する反力等を精度よく計算することが可能であると考えられる。

また、軟らかい雪面上に静止したスキー板の曲げ変形を解析する場合、「真のキャンパー高さ」を用いる必要があることも明らかになった。

参 考 文 献

- (1) 坂田・鈴木, 中部大学工学部紀要, 第28巻, (1992), 5.
- (2) 坂田・鈴木, 日本機械学会講演論文集, No910-67, (1991), 121.
- (3) 坂田・田川, 日本機械学会講演論文集, No933-1, (1993), 275.