

均質等方弾性体の動的 Mindlin の問題

勅使川原 誠司*, 松岡 理*

Dynamic Mindlin Problems for a Homogeneous, Isotropic, Elastic Medium

Seiji TESHIGAWARA*, Osamu MATSUOKA*

(Received May 15, 1991)

The present paper deals with the analysis of a semi-infinite homogeneous, isotropic, elastic medium subjected to vertical and horizontal harmonic point forces in its interior. It may be called dynamic Mindlin problem.

In general, these solutions are obtained by superposition of a composite solution and a homogeneous one. A composite solution is derived from a fundamental solution which is called a dynamic Kelvin's one. This fundamental solution is very difficult to show by elementary functions because the solution represents a semi-infinite integral expression.

So we considered the following method of analysis. Leaving the semi-infinite integral expression for this fundamental solution as it was, we made the boundary equations on the plane boundary of the semi-infinite solid. From the integrand of this equation, we determined an unknown constant of the fundamental solution. According to this analytical method, we can easily obtain dynamic Mindlin solutions without carrying out the inverse integral transformation. Furthermore, resulting solutions have the advantage of directly deriving a dynamic Boussinesq's and a dynamic Cerruti's solution when a point force acts on the surface. In addition, this method is successful for the analysis of an anisotropic medium.

1. 序

構造物と地盤の動的相互作用の問題は、耐震設計においては重要な問題であり、多くの研究がなされている。特に点加振力に対する解析解は、動的相互作用問題における基本的な解として用いられており、地盤表面での加

振に対しては基礎の振動解析等に、地中内加振に対しては地中構造物、杭等の解析に生かされている。本研究はこの内、地中内に点加振力が作用した問題の解を新たな方法で導き、既往の研究¹⁾よりも簡便で、利用し易い形の解析解を示すことを目的としている。さらにこの解析方法によれば、基本解が複雑な半無限積分を含む異方性地盤に対する同様の解析が可能となる利点を有するもの

*建築学科 (Department of Architecture)

である。解析方法の概略は以下の通りである。

半無限均質等方弾性体内に静的集中力が作用する問題は、三次元弾性体に対し、ひずみ核の合成と重ね合わせにより Mindlin によって解かれたため、Mindlin の問題と呼ばれている²⁾。後に最上³⁾は積分変換によって同じ問題の解を導く方法を示した。この Mindlin の問題を動的外力に対し解析したものに松岡他¹⁾の研究がある。松岡の方法は、無限体中に動的外力が作用するいわゆる動的 Kelvin 解を用い、斉次解との重ね合わせでこの問題の解を初めて示したものである。この解析では、基本解である動的 Kelvin 解を、積分変換を用いて無限積分を含まない初等関数表示で求め、動的 Kelvin 解より得られる合成解と斉次解で解き、最終的には、積分逆変換を行って求める解とするものである。

著者らの方法は、Kelvin 解より得られる合成解を半無限積分の形に置き直して静的 Mindlin の解を求めた最上の方法に注目し、合成解を半無限積分表示のまま用い、斉次解との重ね合わせにより、境界条件式の被積分関数項のみで斉次解の未定係数を決定するものである。この方法によれば、積分逆変換を行う必要なしに求める解が得られることになる。

2. 動的 Kelvin 解

等方弾性体の運動方程式は次式で与えられる。

$$\delta_{ij,i} + P_j(x, y, z) = \rho \ddot{u}_j \quad (i=1, 2, 3) \quad \cdots \cdots (1)$$

i は指標 i での微分、 $\cdot$ は時間 t での微分、 ρ は密度を表し、直交 cartesian 座標である。

原点において、 $t=0$ で $X_i e^{i\omega t} \delta(x, y, z)$ の定常点加振力が作用した場合、(1)式の運動方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \alpha \Delta + \beta D_x^2 - \rho D_t^2 & \beta D_x D_y \\ \beta D_x D_y & \alpha \Delta + \beta D_y^2 - \rho D_t^2 \\ \beta D_x D_z & \beta D_y D_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \delta(x, y, z) \\ X_2 e^{i\omega t} \delta(x, y, z) \\ X_3 e^{i\omega t} \delta(x, y, z) \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\alpha = E/2(1+\nu), \beta = E/2(1+\nu)(1-2\nu) \\ \Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

E , ν は弾性体のヤング率、ポアソン比である。

今、(2)式の変位を $u_i = u_i(x, y, z) e^{i\omega t}$ とおき

$$U_i = F_{xyz} [u_i]$$

$$= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x, y, z) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dx dy dz$$

$$u_i = F_{xyz}^{-1} [U_i]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i(k_1, k_2, k_3) e^{-i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} \\ \cdot dk_1 dk_2 dk_3 \quad \cdots \cdots (3)$$

なる Fourier 逆変換を考える。また

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y, z) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dx dy dz = 1$$

となるので、 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = K^2$ とし、(2)式の両辺を三次元 Fourier 変換すれば、 U_i に関する連立一次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \alpha K^2 + \beta k_1^2 - \rho \omega^2 & \beta k_1 k_2 \\ \beta k_1 k_2 & \alpha K^2 + \beta k_2^2 - \rho \omega^2 \\ \beta k_1 k_3 & \beta k_2 k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

これより

$$U_1 = \frac{X_1}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2)} - \frac{\beta k_1 (k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3)}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2) \{(\alpha + \beta) K^2 - \rho \omega^2\}} \\ U_2 = \frac{X_2}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2)} - \frac{\beta k_2 (k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3)}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2) \{(\alpha + \beta) K^2 - \rho \omega^2\}} \\ U_3 = \frac{X_3}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2)} - \frac{\beta k_3 (k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3)}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2) \{(\alpha + \beta) K^2 - \rho \omega^2\}} \quad \cdots (5)$$

ここで

$$I = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3}{(\alpha K^2 - \rho \omega^2) \{(\alpha + \beta) K^2 - \rho \omega^2\}} \quad (6)$$

なるポテンシャルを導入すれば、(5)式の逆変換は

$$u_1 = -\{(\alpha + \beta) \Delta - \rho D_t^2\} I X_1 + \beta D_x (D_x X_1 + D_y X_2 + D_z X_3) I \\ u_2 = -\{(\alpha + \beta) \Delta - \rho D_t^2\} I X_2 + \beta D_y (D_x X_1 + D_y X_2 + D_z X_3) I \\ u_3 = -\{(\alpha + \beta) \Delta - \rho D_t^2\} I X_3 + \beta D_z (D_x X_1 + D_y X_2 + D_z X_3) I \quad \cdots \cdots (7)$$

となる。(6)式のポテンシャル I は、留数定理等を用いて積分を行えば、最終的には次式で表すことができる。

$$I = -\frac{1}{4\pi\alpha(\alpha+\beta)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-c_1 z}}{c_1} - \frac{e^{-c_2 z}}{c_2} \right) \frac{R J_0(rR)}{(c_1^2 - c_2^2)} dR \quad \dots\dots(6)$$

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R^2 = k_1^2 + k_2^2 \\ c_1 = \sqrt{R^2 - \rho\omega^2/\alpha}, \quad c_2 = \sqrt{R^2 - \rho\omega^2/(\alpha+\beta)}$$

であり、 $\sqrt{\alpha/\rho}$ は S 波、 $\sqrt{(\alpha+\beta)/\rho}$ は P 波速度に相当する。

以上によって、基本解である動的 Kelvin 解が(7)式の様々に求められた。しかし、(6)、(7)式からわかるように、動的 Kelvin 解は半無限積分を含む形で示されている。松岡他はポテンシャルを積分変換を用いて初等関数表示で求めたが、以降の解析をより簡便にするため、(6)式のポテンシャルを積分表示のままに使うことにする。それは静的 Mindlin の問題を合成解と斉次解の重ね合わせで解いた最上の方法³⁾が応用できるからである。最上の方法は、無限体中の原点に静的荷重が作用する Kelvin 解を基本に、原点から $\pm f$ 離れた位置に仮想外力を働かせ、両者の合計を合成解とするものであり、境界面での力の釣合式を半無限積分式のままで表示し、被積分関数部分のみで斉次解の未定係数が決定できる利点がある。

3. 斉次解

(2)式で表される運動方程式において、荷重項がゼロとなる斉次方程式を考える。(2)式左辺の係数行列を求めると

$$\det = (\alpha\Delta - \rho D_t^2) \{ (\alpha+\beta)\Delta - \rho D_t^2 \} \quad \dots\dots(8)$$

となる。

$$(\alpha\Delta - \rho D_t^2) \{ H_1, H_2, H_3 \}^T = 0 \\ \{ (\alpha+\beta)\Delta - \rho D_t^2 \} \{ K_1, K_2, K_3 \}^T = 0 \quad \dots\dots(9)$$

を満足するポテンシャル $H_i = H_i e^{i\omega t}$, $K_i = K_i e^{i\omega t}$ を用いれば、斉次方程式の解は

$$u_1 = D_x^2 K_1 + (D_y^2 + D_z^2) H_1 + D_x D_y (K_2 - H_2) + D_x D_z (K_3 - H_3) \\ u_2 = D_x D_y (K_1 - H_1) + D_y^2 K_2 + (D_x^2 + D_z^2) H_2 + D_y D_z (K_3 - H_3) \\ u_3 = D_x D_z (K_1 - H_1) + D_y D_z (K_2 - H_2) + D_z^2 K_3 + (D_x^2 + D_y^2) H_3 \\ \dots\dots(10)$$

と求められている¹⁾。そこで動的 Kelvin 解を求めたと同様に、ポテンシャル H_i , K_i に関して

$$\bar{H}_i = F_{xy} [H_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_i e^{i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \\ \bar{K}_i = F_{xy} [K_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_i e^{i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \\ H_i = F_{xy}^{-1} [\bar{H}_i] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_i e^{-i(k_1 x + k_2 y)} dk_1 dk_2 \\ K_i = F_{xy}^{-1} [\bar{K}_i] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_i e^{-i(k_1 x + k_2 y)} dk_1 dk_2 \\ \dots\dots(11)$$

なる Fourier 逆変換を仮定する。(8)式を Fourier 変換し、得られる微分方程式の解及び無限遠で変位、応力がゼロとなる物理的条件を考慮すれば

$$\bar{H}_i = A_i e^{-c_1 z}, \quad \bar{K}_i = B_i e^{-c_2 z} \quad \dots\dots(12)$$

となり、(12)式を逆変換すれば、ポテンシャルは次の様に示される。

$$H_i = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^\infty A_i e^{-c_1 z} J_0(rR) R dR \\ K_i = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^\infty B_i e^{-c_2 z} J_0(rR) R dR \quad \dots\dots(13)$$

以上によって、動的 Kelvin 解、斉次解が求められたので、動的 Mindlin 解を求めることにする。

4. 動的 Mindlin (I) の解

半無限弾性体内の一点に、垂直方向に定常な点加振力 $Pe^{i\omega t}$ が作用する動的 Mindlin (I) の問題の解を、合成解と斉次解の重ね合わせで解くことにする。

この問題を解くため図-1に示すように、 z 軸上に原点から $\pm f$ 離れた位置に仮想な外力 $\pm Pe^{i\omega t}$ が作用した時の解は、(7)式の動的 Kelvin 解において、 $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = Pe^{i\omega t}$ とすれば求めることができる。この解を合成解⁽⁻⁾とすれば、 $z=0$ の境界面では最上、松岡他の文献より静的、動的荷重ともに $\sigma_{zz} \neq 0$, $\sigma_{zr} = 0$ となることから、合成解より得られる境界面での応力を円筒座標 (r, θ, z) を用いて次のように置くことにする⁴⁾。

$$\bar{\sigma}_{zz} \big|_{z=0} = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \{ 2\alpha R^2 e^{-c_1 f} \\ - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2 f} \} \frac{R J_0(rR)}{\rho\omega^2} dR \\ \bar{\sigma}_{zr} \big|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(14)$$

次に斉次解^(*)を, z 軸方向に力が作用する場合の動的ポテンシャル H_3 , K_3 を用い, $H_1 = H_2 = K_1 = K_2 = 0$ として求めれば, (10)式の関係より, 境界面での応力 σ_{zz}^* , σ_{zr}^* は

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^*|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [\{ (\alpha - \beta) R^2 + (\alpha + \beta) c_2^2 \} c_2 B_3 \\ &\quad - 2\alpha c_1 R^2 A_3] R J_0(rR) dR \\ \sigma_{zr}^*|_{z=0} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty [2c_2^2 B_3 - (R^2 + c_1^2) A_3] R^2 J_1(rR) dR \\ &\quad \dots\dots(15)\end{aligned}$$

ところで, Mindlin (I)の問題は境界面 $z=0$ で $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = 0$ となることから, この境界条件によって斉次解の未定係数 A_3 , B_3 を決めることができる。(14), (15)式より

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} + \sigma_{zz}^*|_{z=0} \\ &= \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \{ 2\alpha R^2 e^{-c_1 f} \\ &\quad - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2 f} \} \frac{R J_0(rR) dR}{\rho\omega^2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [\{ (\alpha - \beta) R^2 + (\alpha + \beta) c_2^2 \} c_2 B_3 \\ &\quad - 2\alpha c_1 R^2 A_3] R J_0(rR) dR \\ &= 0 \\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zr}|_{z=0} + \sigma_{zr}^*|_{z=0} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \{ 2c_2^2 B_3 \\ &\quad - (R^2 + c_1^2) A_3 \} R^2 J_1(rR) dR \\ &= 0 \\ &\quad \dots\dots(16)\end{aligned}$$

上式より

$$\begin{aligned}A_3 &= -\frac{2c_2 \{ 2\alpha R^2 e^{-c_1 f} - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2 f} \} Pe^{i\omega t}}{[(R^2 + c_1^2) \{ (\alpha - \beta) R^2 + (\alpha + \beta) c_2^2 \} - 4\alpha c_1 c_2] \rho\omega^2} \\ B_3 &= \frac{(R^2 + c_1^2)}{2c_2^2} A_3 \\ &\quad \dots\dots(17)\end{aligned}$$

以上により未定係数が決定されたので, 変位 w , 応力 σ_{zz} を求めると次のようになる。

$$w = \bar{w} + w^*$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{Pe^{i\omega t}}{4\pi\alpha(\alpha + \beta)} \int_0^\infty [\{ (\alpha + \beta) R^2 - \rho\omega^2 \} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{e^{-c_1(z-f)}}{c_1} - \frac{e^{-c_2(z-f)}}{c_2} \right\} \\ &\quad - \alpha \{ c_1 e^{-c_1(z-f)} - c_2 e^{-c_2(z-f)} \}] \frac{R J_0(rR) dR}{(c_1^2 - c_2^2)} \\ &\quad + \frac{Pe^{i\omega t}}{4\pi\alpha(\alpha + \beta)} \int_0^\infty [\{ (\alpha + \beta) R^2 - \rho\omega^2 \} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{e^{-c_1(z+f)}}{c_1} - \frac{e^{-c_2(z+f)}}{c_2} \right\} \\ &\quad - \alpha \{ c_1 e^{-c_1(z+f)} - c_2 e^{-c_2(z+f)} \}] \frac{R J_0(rR) dR}{(c_1^2 - c_2^2)} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (c_2^2 B_3 e^{-c_2 z} - R^2 A_3 e^{-c_1 z}) R J_0(rR) dR \\ &= -\frac{Pe^{i\omega t}}{4\pi\alpha(\alpha + \beta)} \int_0^\infty [\{ (\alpha + \beta) R^2 - \rho\omega^2 \} \\ &\quad \cdot \{ c_2 e^{-c_1(z-f)} - c_1 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad - c_2 e^{-c_1(z+f)} + c_1 e^{-c_2(z+f)} \} \\ &\quad - \alpha c_1 c_2 R \{ c_1 e^{-c_1(z-f)} - c_2 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad - c_1 e^{-c_1(z+f)} + c_2 e^{-c_2(z+f)} \}] \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{R}{c_1 c_2 (c_1^2 - c_2^2)} \right\} J_0(rR) dR \\ &\quad - \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty [2c_2 R^2 \{ 2\alpha R^2 e^{-c_1(z+f)} \\ &\quad - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_1 z} e^{-c_2 f} \\ &\quad - c_2 (R^2 + c_1^2) \{ 2\alpha R^2 e^{-c_1 f} e^{-c_2 z} \\ &\quad - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2(z+f)} \}] \\ &\quad \cdot \frac{R J_0(rR) dR}{[(R^2 + c_1^2) \{ (\alpha - \beta) R^2 + (\alpha + \beta) c_2^2 \} - 4\alpha c_1 c_2] \rho\omega^2} \end{aligned}$$

ここで上式を簡潔に示すため, S波速度を $V_T = \sqrt{\alpha/\rho}$, P波速度を $V_L = \sqrt{(\alpha + \beta)/\rho}$ とし, $\omega/V_L = l$, $\omega/V_T = j$ とおけば, $c_1 = \sqrt{R^2 - j^2}$, $c_2 = \sqrt{R^2 - l^2}$ となることから, 最終的に

$$\begin{aligned}w &= \frac{Pe^{i\omega t}}{4\pi\alpha} \int_0^\infty [(\alpha + \beta) \{ c_2 e^{-c_1(z-f)} - c_1 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad - c_2 e^{-c_1(z+f)} + c_1 e^{-c_2(z+f)} \} \frac{\sqrt{R^2 - l^2}}{\beta\sqrt{R^2 - j^2}} \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \{ c_1 e^{-c_1(z-f)} - c_2 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad - c_1 e^{-c_1(z+f)} + c_2 e^{-c_2(z+f)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4 R^2 \sqrt{R^2 - l^2}}{(2 R^2 - j^2)^2 - 4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \\
& \cdot \{ 2 R^2 e^{-c_1(z+f)} - (2 R^2 - j^2) e^{-c_1 z} e^{-c_2 f} \} \\
& + \frac{2(2 R^2 - j^2)^2 \sqrt{R^2 - l^2}}{(2 R^2 - j^2)^2 - 4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \\
& \cdot \{ 2 R^2 e^{-c_1 f} e^{-c_2 z} - (2 R^2 - j^2) e^{-c_2(z+f)} \} \\
& \cdot \left(\frac{R}{j^2} \right) J_0(rR) dR \quad \dots\dots(18)
\end{aligned}$$

解の検算のため、(18)式において $f = 0$ ，すなわち表面に点加振力が作用する場合の解を求めてみると

$$\begin{aligned}
w \mid_{f=0} &= - \frac{P e^{i \omega t}}{2 \pi \alpha} \int_0^\infty \frac{\sqrt{R^2 - l^2}}{(2 R^2 - j^2)^2 - 4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \\
& \cdot \{ j^2 R e^{-c_2 z} - 2 R^3 (e^{-c_2 z} - e^{-c_1 z}) \} J_0(rR) dR \quad \dots\dots(19)
\end{aligned}$$

となり、既に示されている田治見の地表面点加振解⁵⁾と一致する。さらに(18)式において、 $\omega \rightarrow 0$ ，すなわち静的加力とした場合の解を求めると

$$\begin{aligned}
w \mid_{\omega \rightarrow 0} &= \frac{P}{16 \pi (1 - \nu) G} \left[\frac{3 - 4 \nu}{R_1} + \frac{(z - f)^2}{R_1^3} + \frac{5 - 12 \nu + 8 \nu^2}{R_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(3 - 4 \nu)(z + f)^2 - 2 z f}{R_2^3} + \frac{6 z f (z + f)^2}{R_2^5} \right] \\
R_1^2 &= (z - f)^2 + r^2, \quad R_2^2 = (z + f)^2 + r^2 \quad \dots\dots(20)
\end{aligned}$$

となり、静的 Mindlin (I) の解と一致する。同様にして応力 σ_{zz} を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= - \frac{P e^{i \omega t}}{4 \pi} \int_0^\infty [2 R^2 \{ e^{-c_1(z-f)} - e^{-c_1(z+f)} \} \\
& \quad - (2 R^2 - j^2) \{ e^{-c_2(z-f)} - e^{-c_2(z+f)} \}] \left(\frac{R}{j^2} \right) \\
& \quad \cdot J_0(rR) dR \\
& + \frac{P e^{i \omega t}}{2 \pi} \int_0^\infty \left[\frac{4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}}{(2 R^2 - j^2)^2 - 4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \right. \\
& \quad \cdot \{ 2 R^2 e^{-c_1(z+f)} - (2 R^2 - j^2) e^{-c_1 z} e^{-c_2 f} \} \\
& \quad - \frac{(2 R^2 - j^2)^2}{(2 R^2 - j^2)^2 - 4 R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \\
& \quad \cdot \{ 2 R^2 e^{-c_1 f} e^{-c_2 z} - (2 R^2 - j^2) e^{-c_2(z+f)} \}]
\end{aligned}$$

$$\cdot \left(\frac{R}{j^2} \right) J_0(rR) dR \quad \dots\dots(21)$$

上式において、 $\omega \rightarrow 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} \mid_{\omega \rightarrow 0} &= \frac{P}{8 \pi (1 - \nu)} \left[(1 - 2 \nu) \frac{(z - f)}{R_1^3} - (1 - 2 \nu) \frac{(z - f)}{R_2^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3(z - f)^3}{R_1^5} \right. \\
& \quad - \frac{12(2 - \nu) f (z + f)^2 - (3 - 4 \nu)(z + f)^3 - 18 f^2 (z + f)}{R_2^5} \\
& \quad \left. + \frac{30 z f (z + f)^3}{R_2^7} \right] \quad \dots\dots(22)
\end{aligned}$$

となり静的解と一致する。

以上により動的 Mindlin (I) の問題が完全に解けたので、同様の考えによって動的 Mindlin (II) の解を求めることにする。

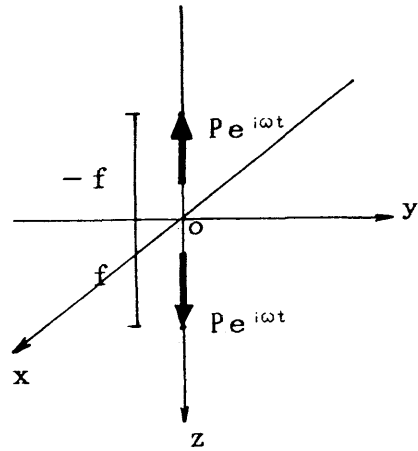


図-1 垂直方向の仮想外力

5. 動的 Mindlin (II) の解

Mindlin (II) の問題は、半無限体内の一点に境界面と平行に水平方向の外力が作用する問題である。今、定常な点加振力 $Q e^{i \omega t}$ が x 軸方向に作用するものとして解を導くことにする。そこで図-2 に示すように、仮想な

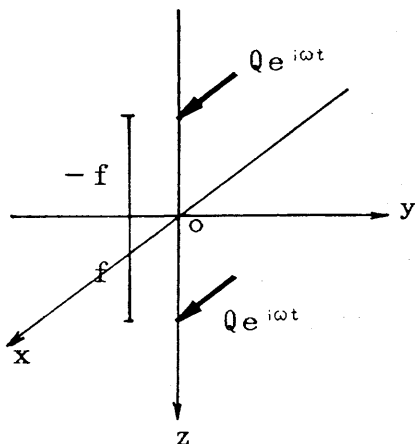


図-2 水平方向の仮想外力

外力を z 軸上 $\pm f$ 離れた位置に正の向きで作用させる。この場合、力の対称性から $z=0$ 面ではせん断応力が生じないことから、垂直加振と同様、境界面での合成解を、(7)式において $X_1 = Qe^{i\omega t}$, $X_2 = X_3 = 0$ として次のように置くことにする。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz} \big|_{z=0} &= \frac{Qe^{i\omega t}}{2\pi\alpha(\alpha+\beta)} \int_0^\infty [(\alpha-\beta)(\alpha R^2 - \rho\omega^2) \\ &\quad \cdot \left(\frac{e^{-c_1 f}}{c_1} - \frac{e^{-c_2 f}}{c_2} \right) \\ &\quad - \alpha(\alpha+\beta)(c_1 e^{-c_1 f} - c_2 e^{-c_2 f})] \\ &\quad \cdot \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{R^2}{c_1^2 - c_2^2} \right) J_1(rR) dR \\ \bar{\sigma}_{zx} \big|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zy} \big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(23)$$

次に斉次解は、問題に適するポテンシャルとして H_1 , $K_1 \neq 0$, $H_3 = D_x H_3$, $H_2 = K_2 = K_3 = 0$ を採用して解くことにする。この場合、境界面応力は次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* \big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [2\alpha c_1^2 A_1 - 2\alpha c_1 R^2 A_3 \\ &\quad - \{(\alpha-\beta)R^2 + (\alpha+\beta)c_2^2\} B_1] \left(\frac{x}{r} \right) R^2 J_1(rR) dR \\ \sigma_{zx}^* \big|_{z=0} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty [c_1(R^2 - c_1^2) A_1 R J_0(rR) dR \\ &\quad - \{2c_1 A_1 - (R^2 - c_1^2) A_3 - 2c_2 B_1\} \\ &\quad \cdot R^2 \{ \left(\frac{xy}{r^2} \right) \{ R J_0(rR) - \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3} \right) J_1(rR) \} \}] dR \end{aligned}$$

$$\cdot R^2 \{ \left(\frac{x}{r} \right)^2 R J_0(rR) - \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3} \right) J_1(rR) \}] dR$$

$$\sigma_{zy}^* \big|_{z=0} = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \{ 2c_1 A_1 - (R^2 - c_1^2) A_3 - 2c_2 B_1 \}$$

$$\cdot R^2 \left(\frac{xy}{r^2} \right) \{ R J_0(rR) - \frac{2}{r} J_1(rR) \} dR$$

.....(24)

Mindlin (II) の問題は、境界面 $z=0$ で $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ となることから、斉次解の未定係数 A_1 , A_3 , B_1 を境界条件より決定できる。(23), (24)式より境界条件式を求めると

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \big|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zz} \big|_{z=0} + \sigma_{zz}^* \big|_{z=0} \\ &= \frac{Qe^{i\omega t}}{2\pi\beta} \int_0^\infty [(\alpha-\beta)c_1(c_2 e^{-c_1 f} - c_1 e^{-c_2 f}) \\ &\quad - \alpha(\alpha+\beta)c_2(c_1 e^{-c_1 f} - c_2 e^{-c_2 f})] \\ &\quad \cdot \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{R^2}{c_2 \rho \omega^2} \right) J_1(rR) dR \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [2\alpha c_1^2 A_1 - 2\alpha c_1 R^2 A_3 \\ &\quad - \{(\alpha-\beta)R^2 + (\alpha+\beta)c_2^2\} B_1] \left(\frac{x}{y} \right) R^2 J_1(rR) dR \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} \big|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zx} \big|_{z=0} + \sigma_{zx}^* \big|_{z=0} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty [c_1(R^2 - c_1^2) A_1 R J_0(rR) dR \\ &\quad - \{2c_1 A_1 - (R^2 - c_1^2) A_3 - 2c_2 B_1\} \\ &\quad \cdot R^2 \{ \left(\frac{xy}{r^2} \right) R J_0(rR) - \left(\frac{x^2 - y^2}{r^3} \right) J_1(rR) \}] dR \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} \big|_{z=0} &= \bar{\sigma}_{zy} \big|_{z=0} + \sigma_{zy}^* \big|_{z=0} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \{ 2c_1 A_1 - (R^2 - c_1^2) A_3 - 2c_2 B_1 \} \\ &\quad \cdot R^2 \left(\frac{xy}{r^2} \right) \{ R J_0(rR) - \frac{2}{r} J_1(rR) \} dR \\ &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(25)$$

従って(25)式の被積分関数のみの関係から、 A_1 , A_3 ,

B_1 は次のように求められる。

$$A_1 = 0$$

$$A_3 = -\frac{Qe^{i\omega t}(2\alpha R^2 - \rho\omega^2)}{(2\alpha R^2 - \rho\omega^2)^2 - 4\alpha^2 c_1 c_2 R^2} \cdot \left\{ \frac{2\alpha c_1 c_2 e^{-c_1 f} - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2 f}}{c_2 \rho \omega^2} \right\}$$

$$B_1 = \frac{2\alpha Qe^{i\omega t}}{(2\alpha R^2 - \rho\omega^2)^2 - 4\alpha^2 c_1 c_2 R^2} \cdot \left\{ \frac{2\alpha c_1 c_2 e^{-c_1 f} - (2\alpha R^2 - \rho\omega^2) e^{-c_2 f}}{\rho \omega^2} \right\}$$

.....(26)

この結果を用いて水平方向変位 u_x を求めると最終的には次式となる。

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{u}_x + u_x^* \\ &= -\frac{Qe^{i\omega t}}{8\pi\alpha\beta} \int_0^\infty \left[\frac{(2\alpha + \beta) R^2 - 2(\alpha + \beta) l^2}{\sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \right. \\ &\quad \cdot \{ c_2 e^{-c_1(z-f)} - c_1 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad \left. + c_2 e^{-c_1(z+f)} - c_1 e^{-c_2(z+f)} \} \right. \\ &\quad - 2(\alpha + \beta) \{ c_1 e^{-c_1(z-f)} - c_2 e^{-c_2(z-f)} \\ &\quad \left. + c_2 e^{-c_1(z+f)} - c_1 e^{-c_2(z+f)} \} \right] \left(\frac{R}{j^2} \right) J_0(rR) dR \\ &\quad + \frac{Qe^{i\omega t}}{8\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \{ c_2 e^{-c_1(z-f)} \\ &\quad - c_1 e^{-c_2(z-f)} + c_2 e^{-c_1(z+f)} - c_1 e^{-c_2(z+f)} \} \\ &\quad \cdot \left(\frac{R^3}{j^2} \right) (\cos 2\theta) J_2(rR) dR \\ &\quad + \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\alpha} \int_0^\infty \left[\frac{(2R^2 - j^2)}{\sqrt{R^2 - l^2} \{ (2R^2 - j^2)^2 - 4R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2} \}} \right. \\ &\quad \cdot \{ 2R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2} e^{-c_1 f} e^{-c_2 z} \\ &\quad \left. - (2R^2 - j^2) e^{-c_2(z+f)} \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R^2 \sqrt{R^2 - j^2}}{(2R^2 - j^2)^2 - 4R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \right. \\ &\quad \cdot \{ 2R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2} e^{-c_1(z+f)} \} \end{aligned}$$

$$- (2R^2 - j^2) e^{-c_1 z} e^{-c_2 f} \}$$

$$\cdot \left(\frac{R^3}{j^2} \right) \{ J_0(rR) - (\cos 2\theta) J_2(rR) \} dR$$

.....(27)

(27)式において $f = 0$ ，すなわち表面点加振力の場合を求めると

$$\begin{aligned} u_x \Big|_{f=0} &= \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\alpha} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-c_1 z}}{\sqrt{R^2 - j^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{R^2 - j^2} e^{-c_1 z} + 2R^2 \sqrt{R^2 - j^2} (e^{-c_2 z} - e^{-c_1 z})}{(2R^2 - j^2)^2 - 4R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \right] \\ &\quad \cdot RJ_0(rR) dR \\ &\quad + \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi\alpha} (\cos 2\theta) \int_0^\infty \left[\frac{e^{-c_1 z}}{\sqrt{R^2 - j^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{R^2 - j^2} e^{-c_1 z} + 2R^2 \sqrt{R^2 - j^2} (e^{-c_2 z} e^{-c_1 z})}{(2R^2 - j^2)^2 - 4R^2 \sqrt{R^2 - j^2} \sqrt{R^2 - l^2}} \right] \\ &\quad \cdot RJ_2(rR) dR \\ &\quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

となり既往の解⁵⁾と一致する。さらに、(27)式において $\omega \rightarrow 0$ すなわち静的加力の解を求めると

$$\begin{aligned} u_x \Big|_{\omega \rightarrow 0} &= \frac{Q}{16\pi(1-\nu)G} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2zf}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R_2 + z + f)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{R_2(R_2 + z + f)} \right\} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

となり、静的 Mindlin 解と一致する。

6. まとめ

半無限均質等方弾性体内に定常な点加振力が作用する動的 Mindlin の問題を、動的 Kelvin 解より得られる合成解を、半無限積分を含むままの形で解くことができた。この方法によれば、既往の研究と比べて解析が一層容易になり、簡潔な形で解析解を示すことができた。さらに、得られた解より簡単に表面点加振解、静的加力解をも算出できることを示した。解析手法におけるこの利点は、複雑な無限積分表示でしか与えられない異方弾性体に対する同様の問題の解析を可能にしたことであり、この種の動問題に対しては有効な解析方法と言える。

参 考 文 献

- 1) 松岡・八幡: 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用(その1, 2, 3), 日本建築学会論文報告集, 昭和55年2月, 第288号, pp.73-84. 同昭和55年7月, 第293号, pp.35-44. 同昭和55年12月, 第298号, pp.43-53.
- 2) R. D. Mindlin: Force at a point in the Interior of a Semi-Infinite Solid, Physics, Vol. 7, 1936, pp. 195-202.
- 3) 木村(最上監修): 土質工学基礎叢書5(土の応力伝播), 鹿島出版会, 昭和53年, pp.49-64.
- 4) 勅使川原・松岡: 横等方弾性地盤内の点加振問題(その1), 日本建築学会東海支部研究報告, 1991年2月, 第29号, pp.129-132.
- 5) 田治見: 建築構造学大系1(地震工学), 彰国社, 昭和45年, pp.91-105.