

ガラーキン法により求められた静的曲げ問題のグリーン関数を用いた振動解析法の精度に関する研究

細川 健治*, 野村 俊彰**, 坂田 敏行*

Accuracy of the Numerical Approach for Vibrations Using Green's Function for the Static Bending Problem Estimated by Galerkin's Method

Kenji HOSOKAWA*, Toshiaki NOMURA**, and Toshiyuki SAKATA*

(Received May 31, 1990)

The purpose of this paper is to discuss the possibility of the reduction of computing time necessary for analyzing vibration problems of the combined system consisting of plate, beam, mass, and damping material. By using the numerical approach proposed by the authors, one can analyze the vibration problems of combined systems. The approach requires the use of Green's function of the plate for the static bending problem. Then, it is necessary to estimate Green's function in a shorter computing time.

First, in the present study, it has been attempted to estimate Green's function for clamped elliptical plates by using Galerkin's method. Next, the free and transient vibrations of clamped elliptical plates have been estimated by using Green's function. Numerical results showed that the accuracy of Green's function is not always sufficient, but that the accuracy of the resultant natural frequency and deflection of the clamped elliptical plates is sufficient. Furthermore, it is very important to point out that the computing time for Green's function is extremely short in comparison with the case using the other numerical approach.

1. 緒言

板に梁,ばね,質量,あるいは減衰材等の要素を付加した複合振動系の解析法として,著者等は板の静的曲げ問題のグリーン関数を用いる方法を提案した^{1),2)}。この方法は,板の静的曲げ問題のグリーン関数を利用した離散化運動方程式の誘導と,固有値問題の解法(自由振動問

題の場合),連立一次方程式の解法(強制振動問題の場合)あるいは常微分方程式の直接積分法(過渡振動問題の場合)とに分けられる。後半の計算は既に完成された計算法を利用可能である。従って,この方法では板のグリーン関数を精度良く,かつ速く計算することが最大の問題である。動的なグリーン関数に比較して,静的なグリーン関数の計算方法は比較的単純であり,様々な計算法が発表されている。例えば,直交異方性等厚板に関しては,任意形状の板のグリーン関数が計算可能である³⁾。

*機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

**機械工学専攻大学院学生 (Graduate Student, Mechanical Engineering)

この方法は選点法により境界条件を満足させ、関数の近似はフーリエ級数により行っているため、精度の良い計算結果が得られるが、計算にかなりの時間を要する。

本研究では、グリーン関数の計算を短時間に行う一つの方法として、試行関数を冪級数で近似するガラーキン法を用いることを試みる。文献[3]の方法とガラーキン法により、周辺固定された楕円板のグリーン関数を求め、それらの値を用いて、周辺固定された楕円板の自由振動問題および過渡振動問題を解析し、得られる解の精度および計算時間を比較検討する。

2. 理論

計算方法の詳細は文献^{1),2),3)}に述べられているので、ここでは簡単に概要のみを説明する。

板の中立面上に x - y 平面を考え、直交異方性板の弾性主軸方向に x , y 軸を一致させれば、板の曲げ振動の基礎式は式(1)で表される。

$$L(w) + \rho h \ddot{w} = q \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 h は板厚、 $q(x, y, t)$ は外力、 $w(x, y, t)$ は板のたわみ、 $\ddot{w}(x, y, t)$ は時間 t に関するたわみの2階微分、 ρ は密度を示す。また、 $L(\)$ は板の曲げ問題の微分演算子であり、次式で与えられる。

$$L(\) = D_x \frac{\partial^4(\)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4(\)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4(\)}{\partial y^4} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 D_x , H , D_y はそれぞれ板の曲げ剛さである。板の静的曲げ問題のグリーン関数 $G(x, y, \xi, \eta)$ は板の境界条件および微分方程式

$$L(G) = \delta(x - \xi) \cdot \delta(y - \eta) \dots\dots\dots (3)$$

を満足する。ただし、 $\delta(\)$ はDiracのデルタ関数である。すなわち、グリーン関数 $G(x, y, \xi, \eta)$ は、格子点 (ξ, η) に単位荷重が作用したときの格子点 (x, y) のたわみである(図1参照)。

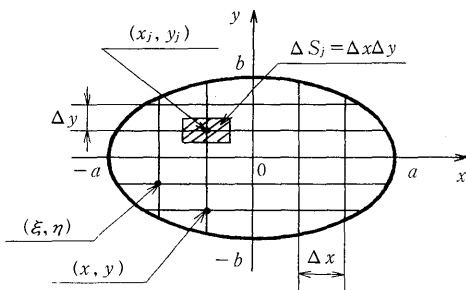


図1 楕円板の分割法

2.1 離散化運動方程式の誘導¹⁾

まず最初に、式(3)を用いて式(1)を積分方程式に変換する。次に、板を図1に示すようにに分割し、分割された微小領域内では被積分関数が一定との仮定のもとに近似積分を行うと、次の離散化運動方程式が求められる。

$$w(x_i, y_i, t) = \bar{w}(x_i, y_i, t) - \sum_{j=1}^J \ddot{w}(x_j, y_j, t) \phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j \dots\dots\dots (4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots, J$$

ただし、

$$\phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) = \rho h G(x_i, y_i, x_j, y_j) \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{w}(x_i, y_i, t) = \sum_{j=1}^J q(x_j, y_j, t) G(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j \dots\dots\dots (6)$$

また、 ΔS_j は微小領域の面積であり、 (x_j, y_j) は微小領域の代表点の座標である。式(4)は時間 t のみに関する連立常微分方程式であり、自由振動問題、強制振動問題および過渡振動問題に応じて簡単に解くことができる。

2.2 自由振動問題の解法¹⁾

固有振動数を求めるため、式(7)のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} q(x, y, t) &= 0 \\ w(x, y, t) &= W(x, y) \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 ω は角振動数である。式(4)に式(7)を代入すると、振動数方程式は次式で表される。

$$\det |\delta_{i,j} - \omega^2 \rho h G(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j| = 0 \dots\dots (8)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots\dots\dots, J$$

ただし、 $\delta_{i,j}$ はKroneckerの δ である。

2.3 過渡振動問題の解法²⁾

式(4)で表される離散化運動方程式に直接積分法の一つであるWilsonの θ 法を適用すれば、時間 $(t + \theta \Delta t)$ におけるたわみの加速度 $\ddot{w}(x_j, y_j, t + \theta \Delta t)$ に関する連立一次方程式が導かれる。

$$\sum_{j=1}^J A_{i,j} \ddot{w}(x_j, y_j, t + \theta \Delta t) = B_i - \sum_{j=1}^J C_{i,j} \dots\dots\dots (9)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots, J$$

ただし、 $A_{i,j}$, B_i , $C_{i,j}$ は時間 t のみに決まるマト

リックスである。時間 $(t + \theta \Delta t)$ の時のたわみの加速度より、時間 $(t + \Delta t)$ の時のたわみの加速度、たわみの速度およびたわみが順次求められる。数値計算例では静止している楕円板にステップ関数状の等分布荷重 Q_0 が作用する場合を解析した。従って、初期条件および荷重条件はそれぞれ式(10)および(11)で表される。

$$w(x, y, t = 0) = \dot{w}(x, y, t = 0) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} q(x, y, t < 0) &= 0 \\ q(x, y, t \geq 0) &= Q_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

2.4 フーリエ級数法(選点法)によるグリーン関数の計算³⁾

文献[3]の方法を用いれば、式(1)および板の境界条件を満足する静的曲げ問題のグリーン関数を精度良く求めることが可能である。この方法は、図2に示すように二辺の長さ r, s の仮想長方形板を考え、この長方形板内に多数の集中荷重 R_i を作用させることにより、求める境界条件および形状を有する板の領域を仮想長方形板内に出現させる方法である。この方法によれば、周辺固定された楕円板のグリーン関数 $G(x, y, \xi, \eta)$ は、次の様に表される。

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L W_{kl}(\xi, \eta) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{r}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{s}\right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} W_{kl}(\xi, \eta) &= A_{kl}(\xi, \eta) / r_{kl} \\ r_{kl} &= D_x \left(\frac{k\pi}{r} \right)^4 + 2H \left(\frac{k\pi}{r} \right)^2 \left(\frac{l\pi}{s} \right)^2 \\ &\quad + D_y \left(\frac{l\pi}{s} \right)^4 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

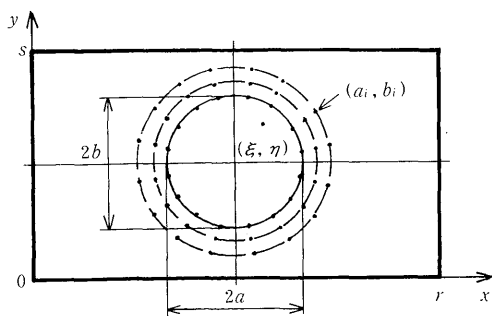


図2 グリーン関数の計算のための仮想長方形板

$$\begin{aligned} A_{kl}(\xi, \eta) &= \frac{4}{rs} \sin\left(\frac{k\pi\xi}{r}\right) \sin\left(\frac{l\pi\eta}{s}\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^I R_i \frac{4}{rs} \sin\left(\frac{k\pi a_i}{r}\right) \sin\left(\frac{l\pi b_i}{s}\right) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

また、座標 (a_i, b_i) は、板の境界条件を満足するように作用させる荷重 R_i の位置を示す。

2.5 ガラーキン法によるグリーン関数の計算

グリーン関数を式(15)のように仮定する。

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^I A_i(\xi, \eta) \psi(x, y) x^m y^n \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $A_i(\xi, \eta)$ は単位荷重の作用位置 (ξ, η) により決まる定数、 n, m および i は正整数であり、 n は m と i により決められる。また、関数 $\psi(x, y)$ は楕円の周辺で固定の境界条件を満足する関数であり、次の様に表される。

$$\psi(x, y) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ガラーキン法に従って、係数 $A_i(\xi, \eta)$ を決める。すなわち、

$$\iint [L(G) - \delta(x - \xi) \cdot \delta(y - \eta)] \psi(x, y) x^{m'} y^{n'} dy dx = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$m', n' = 0, 1, 2, \dots\dots$$

式(17)を変形すると、 $A_i(\xi, \eta)$ に関する連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I A_i \iint L(\psi(x, y) x^m y^n) \psi(x, y) x^{m'} y^{n'} dx dy \\ = \psi(\xi, \eta) \xi^{m'} \eta^{n'} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式(18)より求められる $A_i(\xi, \eta)$ を式(15)に代入することにより、グリーン関数が求められる。

3 計算結果

3.1 グリーン関数の計算時間および精度

数値計算は周辺固定された円板および楕円板について行った。フーリエ級数法では選点数およびフーリエ級数の項数を変化させて計算した結果、選点数 40、フーリエ級数の項数 90×90 項で精度の良い値を求め得ることが明らかになった。また、ガラーキン法の場合には表1に示す様に、1項のみ、1～3項まで、1～6項まで、および1～10項まで用いて計算を行い、その精度を検討した。表より明らかなように、グリーン関数そのものの精度は1～10項まで用いても不十分である。しかし、後述するように、自由振動、過渡振動等の計算にはこの程度

のグリーン関数の精度で十分である。そこで、グリーン関数の計算には1～10項まで用いて計算を行った。上記条件で板の内部を37分割した場合、グリーン関数の計算に必要な時間は172.2秒(フーリエ級数法)、2.8秒(ガラーキン法)である。また、板の内部を137分割した場合の計算時間はそれぞれ973秒および3.3秒である。このように分割数が増大すればするほど、計算時間の差は急激に増大する。

3.2 自由振動

表2は一次($s=1$)および二次($s=2$)の固有角振動数 ω_s に及ぼす円板の分割数の影響を示す。フーリエ級数法、ガラーキン法共に、分割数を増加させることにより急速に収束することが明らかである。また、その収束値は文献[4]に示されている厳密値と良く一致している。表3は板を137分割した場合の周辺固定された楕円板の固有角振動数 ω_s の計算結果を示す。文献[5, 6]

表1 周辺固定された円板のグリーン関数
 $G(x, y, \xi, \eta)/(10^{-2}a^2D_x)$ の収束性
荷重の作用位置: $(\xi = -4a/7, \eta = 0)$,
分割数: $J=137$

座標(x, y)	(0, 0)	(4a/7, 0)	(0, 4a/7)
フーリエ級数法	0.6128	0.1278	0.2171
ガラーキン法	1項	0.6767	0.3069
	1～3項	0.6767	0.0397
	1～6項	0.6384	0.1541
	1～10項	0.6384	0.1053

フーリエ級数法: 選点数40, 級数の項数90×90

表2 周辺固定された円板の固有角振動数
 $\omega_s/\sqrt{D_x/\rho h b^4}$ の収束性

分割数 J	フーリエ級数法 $s=1$ $s=2$		ガラーキン法 $s=1$ $s=2$	
21	10.191	21.008	10.219	21.284
37	10.212	21.217	10.221	21.306
69	10.213	21.232	10.217	21.276
97	10.215	21.250	10.217	21.276
137	10.215	21.255	10.217	21.276
177	10.216	21.258	10.217	21.276
文献.[4]	10.216	21.26	10.216	21.26

フーリエ級数法: 選点数40, 級数の項数90×90

ガラーキン法: 試行関数1～10項

に報告されている値と比較して精度の良い値が求められていると考えられる。

3.3 過渡振動

静止状態の板にステップ関数状の等分布荷重 Q_0 が作用した時の板の中心のたわみを計算した(式(10)および(11)参照)。また、時間刻みは $\Delta t = 2\pi/300\omega_1$ とした。ただし、 ω_1 は板の基本固有角振動である。図3は周辺固定された楕円板の中心のたわみの時間応答の例を示す。図より明らかな様に、 $t = \pi/\omega_1$ の近傍でたわみが最大になるので、この時間における値でたわみの収束性を検討した。表4は周辺固定された円板に等分布荷重 Q_0 が作用するときの円板の中心のたわみに及ぼす分割数の影響を示す。表より、板の分割数を増加させることによりたわみが急速に収束することが明らかである。表5は時間 $t = \pi/\omega_1$ における楕円板の中心のたわみを示す。この表より、いずれの計算法でも類似の値を求め得ることが明らかである。

表3 周辺固定された楕円板の固有角振動数
 $\omega_s/\sqrt{D_x/\rho h b^4}$ 分割数: $J=137$

二辺の比 a/b	フーリエ 級数法	ガラーキン 法	文献.[5]	文献.[6]
1.0	10.215	10.217	10.214	10.218
1.1	9.348	9.349	9.345	9.348
1.2	8.717	8.719	8.720	8.718
1.4	7.891	7.893	7.891	—
1.5	7.613	7.615	—	7.613

フーリエ級数法: 選点数40, 級数の項数90×90

ガラーキン法: 試行関数1～10項

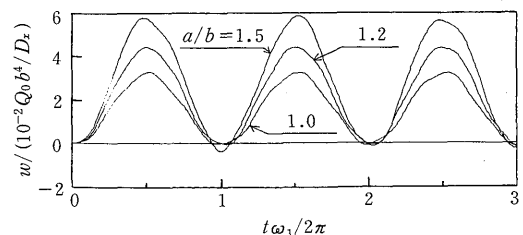


図3 ステップ関数状の等分布荷重を受ける周辺固定楕円板の中心のたわみの時間応答

表4 ステップ関数状の等分布荷重 Q_0 を受ける周辺固定円板の中心のたわみ $w/(10^{-2}Q_0b^4/D_s)$ の収束性
時間刻み: $\Delta t = 2\pi/300\omega_1$, 時間: $t = \pi/\omega_1$

分割数 J	フーリエ級数法	ガラーキン法
21	3.246	3.243
37	3.217	3.199
69	3.266	3.245
97	3.265	3.238
137	3.266	3.241
177	3.266	3.240

フーリエ級数法: 選点数40, 級数の項数 90×90

ガラーキン法: 試行関数 1 ~ 10項

表5 ステップ関数状の等分布荷重 Q_0 を受ける周辺固定楕円板の中心のたわみ $w/(10^{-2}Q_0b^4/D_s)$
分割数: $J = 137$, 時間刻み: $\Delta t = 2\pi/300\omega_1$,
時間: $t = \pi/\omega_1$

二辺の比 a/b	フーリエ級数法	ガラーキン法
1.0	3.266	3.241
1.1	3.885	3.848
1.2	4.414	4.369
1.4	5.309	5.229
1.5	5.745	5.611

フーリエ級数法: 選点数40, 級数の項数 90×90

ガラーキン法: 試行関数 1 ~ 10項

4. 結 論

板の静的曲げ問題のグリーン関数を用いる振動解析法の高速度化を計るため, グリーン関数の計算を短時間に行う一つの方法として, 試行関数を冪級数で近似するガラーキン法を用いることを試みた。また, 比較のためにフーリエ級数法を用いて精度の良いグリーン関数をも求めた。二種類の方法により求められた, 周辺固定楕円板のグリーン関数を用いて, 周辺固定された楕円板の自由振動問題および過渡振動問題を解析し, 得られた解の精度および計算時間を比較検討した結果, 次の結論が得られた。

1. ガラーキン法で求めたグリーン関数の精度はフーリエ級数法で求めたグリーン関数の精度に比較してはるかに悪いが, 最終的に求められる固有角振動数および過渡振動のたわみの精度にその影響はほとんど表れていない。

2. 計算時間はガラーキン法の方が極端に少ない。

従って, ここで検討した振動解析法に用いるグリーン関数の計算法としてはガラーキン法がはるかに優れていると結論できる。

参 考 文 献

- 1) 坂田・細川, 機論, 54-508, C (昭和63), 2837.
- 2) 坂田・細川, 機論, 54-508, C (昭和63), 2844.
- 3) 坂田・竹内, 機論, 50-453, C (昭和59), 783.
- 4) Leissa, A. W., Vibration of plates, 1969, 8, NASA SP-160.
- 5) 佐藤, 機論, 41-347, (昭和50), 1996.
- 6) 浅井, 航空宇宙学会誌, 25-280, (昭和52), 248.