

横等方弾性地盤上円形基礎の振動

勅 使 川 原 誠 司*

Vibrations of a Circular Foundation on a Transversely Isotropic Medium

Seiji TESHIGAWARA*

(Received April 8, 1988)

This paper is concerned with the vibration of a massless circular foundation on a semi-infinite transversely isotropic medium.

Using the approximate expressions of the propagation of seismic waves caused by a point excitation on the surface of the elastic and anisotropic ground, the dynamic displacements of circular foundations are derived from the assumption of various stress distributions. Vibrational modes are dealt with for three kinds of motion: vertical, horizontal, and rotational.

The dynamic characteristics of such foundation-ground systems are represented as the form of "Vibrational Impedance" and "Dynamical Ground Compliance" which means the complex transfer function between the foundation displacement and the exciting force.

From the numerical results of these functions, it is found that the effect of transverse anisotropy on the vibrational properties is different from applied force.

1. はじめに

弾性地盤上基礎の振動問題は構造物と基礎の動的相互作用の解析においては基本的な問題であり、円形基礎の垂直、ねじれ振動を最初に扱った Reissner¹⁾を始めとして多くの研究がある。このような地盤上に位置する基礎に外力が作用する問題は地盤表面での境界条件が変位と応力で与えられる、いわゆる混合境界値問題となるが、解析を容易にするため、基礎面下に生ずる応力の分布型を仮定し、Fourier-Bessel 展開により境界条件を応力のみで示す方法が多く用いられ、Reissner はこの接地圧を垂直振動では一様分布、ねじれ振動では三角形分布と仮

定している。また、Sung²⁾、Quinlan³⁾は接地圧分布を一様分布、放物線分布、剛板分布(剛体底面分布、Bousinesq 分布ともいう)の3種類を仮定し垂直振動の解を求めた。鳥海⁴⁾は水平、回転振動の解まで求めており、Arnold 他⁵⁾はねじれ振動まで加えた解を求めている。これらの解析は数学的取扱が比較的やさしい円形基礎を対象としたものであるが、実際の構造物における基礎形状は矩形が一般的なことから田治見⁶⁾は三次元弾性体の波動方程式の一般解を示した妹沢⁷⁾の結果を用い、各種境界条件より求めた点加振解の近似式を用いて積分により円形、長方形基礎の垂直、水平、回転振動の動的変位を求め"振動アドミッタンス"を示した。また、小堀他⁸⁾は長方形基礎に垂直、水平、回転およびねじれ振動が作用し

*建築学科 (Department of Architecture)

た問題を 3 重 Fourier 変換を導入して解き“Dynamical Ground Compliance”を求めた。さらに山原⁹⁾は地盤が半無限なるが故に持つ見かけの減衰効果に注目し、波動現象によって生ずる見かけの減衰抵抗を“波動リアクタンス”として円形基礎の上下、水平、回転動を扱い、矩形基礎は等価な円形基礎に置き換えて解析を行っている。

以上の研究は地盤を均質等方弾性体とみなして解析を行っているものであるが、実際の地盤は必ずしもこれらの理論が仮定するような均質等方弾性体とはいえない性質を有している。強固な地盤が有限深さの所に存在するような層状媒体とみなす異質等方弾性体、あるいは粘土地盤、砂地盤の堆積過程によって見られる異方性の出現、岩石、砂の異方性挙動などから等質異方弾性体としての扱いも必要であろう。このような考えによる多層媒体としての動的解析は小堀他¹⁰⁾を始め数多く論文が発表されているが、異方性地盤を対象とする基礎振動の解析は少なく¹¹⁾その動特性が十分明らかにされているとは言えない。そこで著者らは、堆積土質地盤、転圧土質構造物さらには成層岩盤のような水平方向と深さ方向の変形特性が異なる地盤を対象とする、異方性体の中でも比較的簡単な横等方弾性体の動的特性を、半無限横等方弾性体表面に垂直、水平方向の点加振力が作用する場合について明らかにした^{12,13)}。

本論文では、この横等方弾性体の点加振解を基に、半無限異方弾性地盤上基礎に定常加振力が作用する問題を点加振解の近似式を用いる田治見の方法を参考にして解析し、横等方弾性地盤上円形基礎の振動特性を基礎スラブ中心点の動的変位等で明らかにする。基礎に作用する定常加振力を上下、水平、回転動とし、基礎底面の接地圧を上下、水平動では一様、剛板、放物線分布、回転動では三角形、剛板分布と仮定して解を示し、数値計算による図・表等で異方性地盤の弾性定数が振動特性に及ぼす影響を検討する。

2. 横等方弾性体の弾性係数

横等方弾性体は一つの軸の回転に対して方向性を持たない弾性体で、回転軸に直交する方向はすべて同じ弾性定数となり、独立な弾性定数は対称性から 5 個となり¹⁴⁾、これを a, b, c, d, e とする。また、変位、応力に及ぼす弾性定数の力学特性を明らかにするため、改めて工学的定数を用いれば

$$\begin{aligned} a &= \{1 - (\nu)^2 (E/E')\} E / \{1 + \nu\} \{1 - \nu - 2(\nu)^2 (E/E')\} \\ b &= \{\nu + (\nu)^2 (E/E')\} E / \{1 + \nu\} \{1 - \nu - 2(\nu)^2 (E/E')\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \nu E / \{1 - \nu - 2(\nu)^2 (E/E')\} \\ d &= (1 - \nu) E / \{1 - \nu - 2(\nu)^2 (E/E')\} (E/E') \\ e &= E / \{1 + (1 + \nu + \nu) (E/E')\} \end{aligned}$$

ここで E : 等方面内のヤング率

E' : 等方面に垂直な方向のヤング率

ν : 等方面内に力が作用した時の等方面内のポアソン比

ν' : 等方面に垂直な方向に力が作用した時の等方面内のポアソン比

となる¹⁵⁻¹⁷⁾。ただし、等方面に力が作用した時の等方面に垂直な面のポアソン比 ν'' は、弾性体の対称性より $\nu'' = \nu E/E'$ で表すことができ¹⁵⁾、5 個の弾性定数は 4 つの工学的定数で示すことができる。さらに弾性体のひずみエネルギー正值の条件等を付加すれば

$$\begin{aligned} a, c, d, e &> 0, \quad a > b, \quad a + b > 0, \quad ad > c^2, \\ d(a + b) &> 2c^2, \quad c + 2e \geq \sqrt{ad} \end{aligned}$$

となる¹⁸⁾。

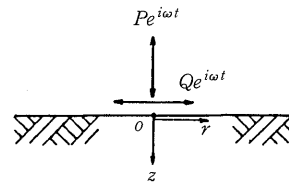


図-1 弾性地盤上の点加振力

3. 横等方弾性地盤の上下・水平方向点加振解

横等方弾性地盤表面に上下、水平方向の定常な点加振力が作用する場合(図-1)、地表面 $z = 0$ での上下方向加振に対する加振方向変位 w 、 x 軸方向の水平加振に対する加振方向変位 u は次式で与えられている^{12,13)}。

$$w = -\frac{P e^{i\omega t}}{2\pi} \beta_2 \int_0^\infty \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - \gamma_1^2}}{F_1(\xi)} J_0(a_0 \xi) d\xi \dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q e^{i\omega t}}{4\pi} \beta_2 \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{2}}{(a-b)e} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - \gamma_0^2}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2e} \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{F_1(\xi)} \left. \right] J_0(a_0 \xi) \\ &\quad + (\cos 2\theta) \left\{ \frac{\sqrt{2}}{(a-b)e} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - \gamma_0^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2e} \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{F_1(\xi)} \right\} J_2(a_0 \xi) d\xi \dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで $\beta_2 = \sqrt{\rho \omega^2}$, $\gamma_0^2 = 2e/(a-b)$, $\gamma_1^2 = e/a$,

$$a_0 = \omega r / V_s$$

V_s は弾性体のs波速度, $F_1(\xi)$ は横等方弾性体の Rayleigh 関数であり次式で示される。

$$F_1(\xi) = \frac{ad - c^2}{\sqrt{ae(ad - c^2 - 2ce)}} \left[\frac{\{\gamma_3^2 \sqrt{\xi^2 - \gamma_1^2} - (\xi^2 - \gamma_4^2) \sqrt{\xi^2 - 1}\}}{\sqrt{(\xi^2 - \gamma_5^2) + \left(\frac{2e\sqrt{ad}}{ad - c^2 - 2ce}\right) \sqrt{\xi^2 - \gamma_1^2} \sqrt{\xi^2 - 1}}} \right]$$

ただし, $\gamma_3^2 = e\sqrt{ad}/(ad - c^2)$, $\gamma_4^2 = de/(ad - c^2)$, $\gamma_5^2 = e(d + e)/(ad - c^2 - 2ce)$

田治見⁶⁾は, (1), (2)式と同様の形で示される等方性体の点加振解について, Bessel 関数を含む半無限積分の煩雑さを避けるため, 近似式で表す方法を示した。本解析においても手法の簡便さからこの方法を用いると, (1), (2)式の近似式は次のように表示することができる。

$$w = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi r} \frac{B_v}{e} e^{-ix_1 r} \dots\dots\dots(3)$$

$$u = \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi r} \frac{B_t}{e} e^{-ix_2 r} \dots\dots\dots(4)$$

$$B_v = \frac{\sqrt{ae(ad - c^2 - 2ce + 2e\sqrt{ad})}}{(ad - c^2)}$$

$$B_t = \frac{\sqrt{\frac{2e}{a-b}}}{\sqrt{a-b}} \left[1 + \frac{\sqrt{a-b}}{d(ad - c^2) \sqrt{2a(ad - c^2 - 2ce + 2e\sqrt{ad})}} [e\{2ad^2 + c^2(a-d)\} - \{ce(a+d) - d(ad - c^2)\} \sqrt{ad}] \right]$$

r は加振点からの距離, $\kappa_1 = \Gamma_1 \omega / V_s$, $\kappa_2 = \Gamma_2 \omega / V_s$ であり, Γ_1 , Γ_2 は表-1で示すような値を持ち, (1), (2)式を直接数値積分した値に対し, $0 < a_0 < 1.2$ の範囲で最大5%程度の誤差を持つ式で近似してある。

4. 横等方弾性地盤上円形基礎の振動

弾性地盤上基礎の動的変形を求める場合, 円形基礎の各点を点源とみなして(3), (4)式に各点の応力密度すなわち接地圧をかけ, 基礎底面全体の総和をとり, 基礎中心点の変位を代表変位として計算を行う。作用外力は上下, 水平, 回転振動(図-2)とし, 接地圧を上下, 水平動の場合は剛板, 同様, 放物線分布を, 回転振動の場合は三角形, 剛板分布と仮定して求める。

4.1 上下動の場合

半径 r_0 の円形基礎スラブ(無質量とする)に $Pe^{i\omega t}$ の上下振動荷重が作用する場合, 中心点変位 w_c は(3)式を用

表-1 Γ_1 , Γ_2 の値

E/E'	ν	ν'	Γ_1	Γ_2
0.5	0.12	0.35	1.263(1.260)	1.010(1.018)
0.5	0.35	0.55	1.257(1.249)	1.006(1.014)
0.5	0.18	0.70	1.288(1.276)	0.949(0.954)
1.0	0.25	0.25	1.240(1.237)	0.940(0.944)
1.0	0.35	0.35	1.229(1.222)	0.907(0.908)
1.0	0.45	0.45	1.261(1.242)	0.883(0.888)
1.5	0.35	0.45	1.286(1.255)	0.780(0.778)
2.0	0.18	0.35	1.226(1.215)	0.745(0.746)
2.0	0.20	0.40	1.250(1.230)	0.721(0.722)
2.0	0.06	0.175	1.243(1.240)	0.858(0.859)

Γ_1 , Γ_2 は a_0 が0.0近傍の値, ()内は1.0近傍の値

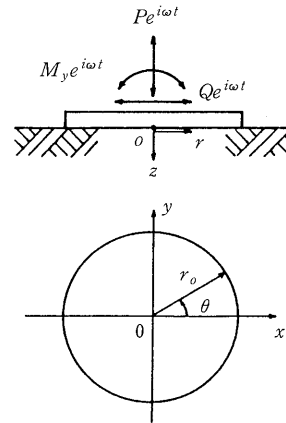


図-2 円形基礎上の加振力

い, 各接地圧に対し以下のように求められる。

(a) 接地圧が剛板分布の場合

地盤表面($z=0$)での境界条件は接地圧の仮定より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} & r \leq r_0 \\ \sigma_z &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となり, 中心点変位は次式で示される。

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \frac{B_v}{e} \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{e^{-\kappa_1 r}}{r \sqrt{r_0^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= \frac{Pe^{i\omega t}}{4r_0} \frac{B_v}{e} [J_0(\kappa_1 r_0) - iH_0(\kappa_1 r_0)] \\ &\approx \frac{Pe^{i\omega t}}{4r_0} \frac{B_v}{e} \left[1 - \frac{(\kappa_1 r_0)^2}{4} + \frac{(\kappa_1 r_0)^4}{32} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2}{\pi} \left\{ (\kappa_1 r_0) - \frac{(\kappa_1 r_0)^3}{9} \right\} \right] \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここで、 $J_0(z)$ はゼロ次の Bessel 関数、 $H_0(z)$ はゼロ次の Struve 関数である。(6)式を便宜的に

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{Pe^{i\omega t}}{4r_0} \frac{B_v}{e} [f_1 + if_2] \\ &= \frac{Pe^{i\omega t}}{k_f} [f_1 + if_2] \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ただし $k_f = 4r_0e/B_v \dots\dots\dots(8)$

とおけば k_f は地盤の静的バネ定数を表し、(7)式の [] で示される複素数が、加振力と変位との比を表す振動アドミッタンスと呼ばれるものに相当する。また、(6)式を

$$\frac{w_c}{Pe^{i\omega t}} e r_0 = [F_1 + iF_2] \dots\dots\dots(9)$$

とおけば、[] 内は(7)式と同様加振力と変位の比を表す Dynamical Ground Compliance (D.G.C. と略す) となる。

(b) 接地圧が一様分布の場合

地盤表面での境界条件は接地圧の仮定より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{Pe^{i\omega t}}{\pi r_0^2} & r \leq r_0 \\ \sigma_z &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

となり、中心点変位は

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \frac{B_v}{e} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{r} e^{-i\kappa_1 r} r dr d\theta \\ &= \frac{Pe^{i\omega t}}{\pi r_0} \frac{B_v}{e} \cdot \\ &\quad \left[\frac{\sin(\kappa_1 r_0) - i\{1 - \cos(\kappa_1 r_0)\}}{\kappa_1 r_0} \right] \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_f = \pi r_0 e / B_v \dots\dots(12)$ となる。

(c) 接地圧が放物線分布の場合

地盤表面での境界条件は接地圧の仮定より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2P(r_0^2 - r^2)e^{i\omega t}}{\pi r_0^4} & r \leq r_0 \\ \sigma_z &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

となり、中心点変位は

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \frac{B_v}{e} \frac{1}{\pi r_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{r} e^{-i\kappa_1 r} (r_0^2 - r^2) \cdot \\ &\quad r dr d\theta \\ &= \frac{4Pe^{i\omega t}}{3\pi r_0} \frac{B_v}{e} \left[\left\{ 1 - \frac{(\kappa_1 r_0)^2}{2} + \frac{(\kappa_1 r_0)^4}{280} \right\} \right. \\ &\quad \left. - i \left\{ \frac{3(\kappa_1 r_0)}{8} - \frac{(\kappa_1 r_0)^3}{280} + \frac{(\kappa_1 r_0)^5}{1680} \right\} \right] \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_f = 3\pi r_0 e / 4 B_v \dots\dots(15)$ となる。

4.2 水平動の場合

円形基礎中心に水平方向(x 方向)の振動荷重 $Qe^{i\omega t}$ が加わる場合、境界条件に用いられる地盤表面での応力はせん断応力で示され、中心点変位 u_c は(4)式を用い、各接地圧に対して以下のように求められる。

(a) 接地圧が剛板分布の場合

地盤表面での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Qe^{i\omega t}}{2\pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} & r \leq r_0 \\ \tau_{zx} &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

となり、上下動と同様の計算により、中心点変位 u_c は

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi} \frac{B_t}{e} \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{e^{-i\kappa_2 r}}{r \sqrt{r_0^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= \frac{Qe^{i\omega t}}{8r_0} \frac{B_t}{e} [J_0(\kappa_2 r_0) - iH_0(\kappa_2 r_0)] \\ &= \frac{Qe^{i\omega t}}{8r_0} \frac{B_t}{e} \left[1 - \frac{(\kappa_2 r_0)^2}{4} + \frac{(\kappa_2 r_0)^4}{32} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2}{\pi} \left\{ (\kappa_2 r_0) - \frac{(\kappa_2 r_0)^3}{9} \right\} \right] \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_f = 8r_0 e / B_t \dots\dots(18)$ となる。

(b) 接地圧が一様分布の場合

地盤表面での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Qe^{i\omega t}}{\pi r_0^2} & r \leq r_0 \\ \tau_{zx} &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

従って、中心点変位は

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi} \frac{B_t}{e} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{r} e^{-i\kappa_2 r} r dr d\theta \\ &= \frac{Qe^{i\omega t}}{2\pi r_0} \frac{B_t}{e} \cdot \\ &\quad \left[\frac{\sin(\kappa_2 r_0) - i\{1 - \cos(\kappa_2 r_0)\}}{\kappa_2 r_0} \right] \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_f = 2\pi r_0 e / B_t \dots\dots(21)$ となる。

(c) 接地圧が放物線分布の場合

地盤表面での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{2Q(r_0^2 - r^2)e^{i\omega t}}{\pi r_0^4} & r \leq r_0 \\ \tau_{zx} &= 0 & r > r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

従って、中心点変位は

$$\begin{aligned}
 u_c &= \frac{Qe^{i\omega t}}{4\pi} \frac{B_t}{e} \frac{2}{\pi r_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{r} e^{-i\kappa_2 r} \\
 &\quad (r_0^2 - r^2) r dr d\theta \\
 &\doteq \frac{2Qe^{i\omega t}}{3\pi r_0} \frac{B_t}{e} \left[\left\{ 1 - \frac{(\kappa_2 r_0)^2}{2} + \frac{(\kappa_2 r_0)^4}{280} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - i \left\{ \frac{3(\kappa_2 r_0)}{8} - \frac{(\kappa_2 r_0)^3}{280} + \frac{(\kappa_2 r_0)^5}{1680} \right\} \right] \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_t = 3\pi r_0 e / 2 B_t \dots (24)$ となる。

4.3 回転振動の場合

y 軸を回転軸とする加振力モーメントが作用した場合の中心点の回転 Ω_{y0} を変形成分として求めることにする。この場合の接地圧は、距離 r に比例する三角形分布と基礎両端部で応力が最大となる剛板分布について求める。そこで、地盤面上 (r, θ) に点加振がある時、原点における x 方向の回転角は、(3) 式の上下方向点加振解を r で微分したものより

$$\Omega_y = \frac{B_v}{2\pi e} \frac{Pe^{i\omega t} \cos \theta}{r^2} (1 + i\kappa_1 r) e^{-i\kappa_1 r} \dots\dots\dots (25)$$

で示される。

(a) 接地圧が三角形分布の場合

地盤表面での境界条件は、加振モーメントが y 軸回りに作用する場合

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{4}{\pi} \frac{M_y e^{i\omega t}}{r_0^4} r \cos \theta & r \leq r_0 \\
 \sigma_z &= 0 & r > r_0
 \end{aligned} \right\} (26)$$

これより、(25) 式の関係を用いて

$$\begin{aligned}
 \Omega_{y0} &= \frac{B_v}{2\pi e} \frac{4M_y e^{i\omega t}}{\pi r_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r \cos^2 \theta (1 + i\kappa_1 r)}{r^2} \cdot \\
 &\quad e^{-i\kappa_1 r} r dr d\theta \\
 &= \frac{2B_v}{\pi e} \frac{M_y e^{i\omega t}}{r_0^3} \left[\frac{2\sin(\kappa_1 r_0)}{\kappa_1 r_0} - \cos(\kappa_1 r_0) \right. \\
 &\quad \left. - i \left\{ \frac{2\{1 - \cos(\kappa_1 r_0)\}}{\kappa_1 r_0} - \sin(\kappa_1 r_0) \right\} \right] \\
 &\doteq \frac{2B_v}{\pi e} \frac{M_y e^{i\omega t}}{r_0^3} \left[\left\{ 1 + \frac{(\kappa_1 r_0)^2}{6} - \frac{(\kappa_1 r_0)^4}{40} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(\kappa_1 r_0)^6}{1008} \right\} - i \left\{ \frac{(\kappa_1 r_0)^3}{12} - \frac{(\kappa_1 r_0)^5}{180} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(\kappa_1 r_0)^7}{5040} \right\} \right] \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

静的バネ定数は $k_r = \pi r_0^3 e / 2 B_v \dots\dots\dots (28)$

(b) 接地圧が剛板分布の場合

地盤表面での境界条件は

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{3M_y e^{i\omega t}}{2\pi r_0^3} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} & r \leq r_0 \\
 \sigma_z &= 0 & r > r_0
 \end{aligned} \right\} (29)$$

従って、中心点の回転角は

$$\begin{aligned}
 \Omega_{y0} &= \frac{B_v}{2\pi e} \frac{3M_y e^{i\omega t}}{2\pi r_0^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r \cos^2 \theta (1 + i\kappa_1 r)}{r^2 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \cdot \\
 &\quad e^{-i\kappa_1 r} r dr d\theta \\
 &= \frac{3B_v}{8e} \frac{M_y e^{i\omega t}}{r_0^3} \left[\{ J_0(\kappa_1 r_0) + (\kappa_1 r_0) J_1(\kappa_1 r_0) \} \right. \\
 &\quad \left. - i [H_0(\kappa_1 r_0) - (\kappa_1 r_0) \left\{ \frac{2}{\pi} H_1(\kappa_1 r_0) \right\}] \right] \\
 &\doteq \frac{3B_v}{8e} \frac{M_y e^{i\omega t}}{r_0^3} \left[\left\{ 1 + \frac{(\kappa_1 r_0)^2}{4} - \frac{3(\kappa_1 r_0)^4}{64} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{5(\kappa_1 r_0)^6}{768} \right\} - i \left\{ \frac{2(\kappa_1 r_0)^3}{9} - \frac{4(\kappa_1 r_0)^5}{225} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{6(\kappa_1 r_0)^7}{11025} \right\} \right] \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

ここで $J_1(z)$ は 1 次の Bessel 関数、 $H_1(z)$ は 1 次の Struve 関数であり、静的バネ定数は $k_r = 8r_0^3 e / 3 B_v \dots (31)$ となる。

5. 横等方弾性地盤の振動アドミッタンスと D.G.C.

前節で求めた上下、水平、回転振動の各接地圧に対する動的変位解を用いて地盤の振動特性を調べることにする。ここでは、振動特性を表すものとして田治見の定義した振動アドミッタンスと小堀他が定義した $D.G.C.$ を求め、その特性を検討する。両者とも加振力と動的変位の比を表すものであるが、振動アドミッタンスは地盤の静的剛性を含めない値となるので、地盤の弾性係数に影響されない一定の値[(7) 式]を示すものとなる。これに対し $D.G.C.$ は静的剛性をも含めた値[(9) 式]で定義され、剛性比、ポアソン比の影響を直接知ることができる。以上のことより、本研究では異方性地盤の弾性係数が動的特性にどのような影響を及ぼすかを明らかにするため $D.G.C.$ を中心に解の特性を検討する。

表-1 に示す 10 種類の弾性地盤について計算を行ったものが図-3~図-7 に示すものである。図-3(a), (b) は振動アドミッタンスを表したもので、無次元振動数 $A_0 = \kappa_1 r_0 = \Gamma_1 \bar{a}_0$ ($\bar{a}_0 = \omega r_0 / V_s, i=1, 2$) を関数として求めたものである。これによれば、地盤の物理的性質であるポアソン比 (ν, ν') 、剛性比 (E/E') の違いを示す静的剛性 k_r 、近似値 Γ_1 の影響が除外されるため地盤の種類に関係なく一定の値として求められる。従って、上下動、水平動

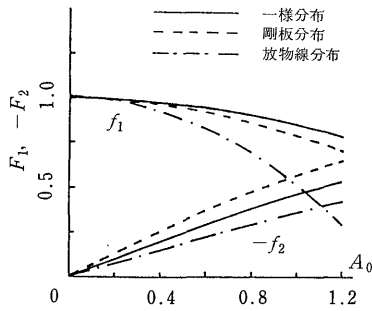


図-3(a) 上下・水平動の振動アドミタンス

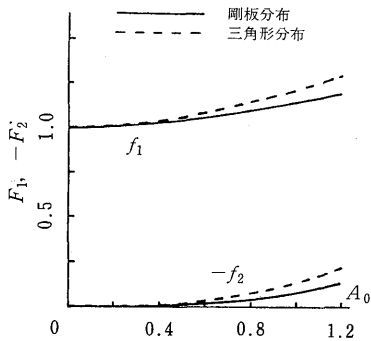
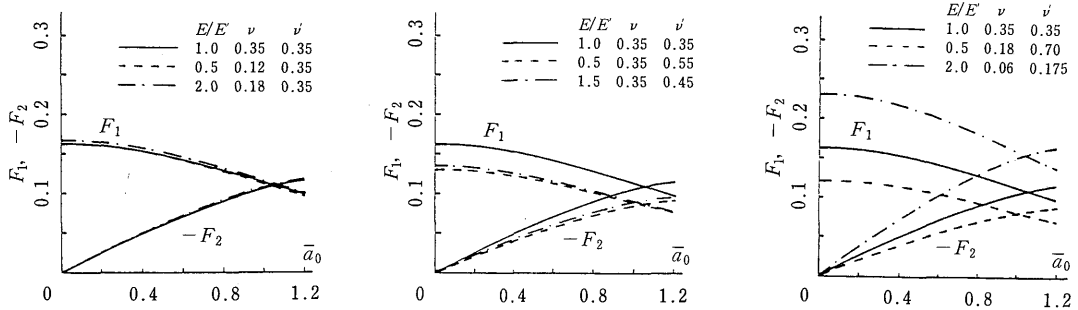
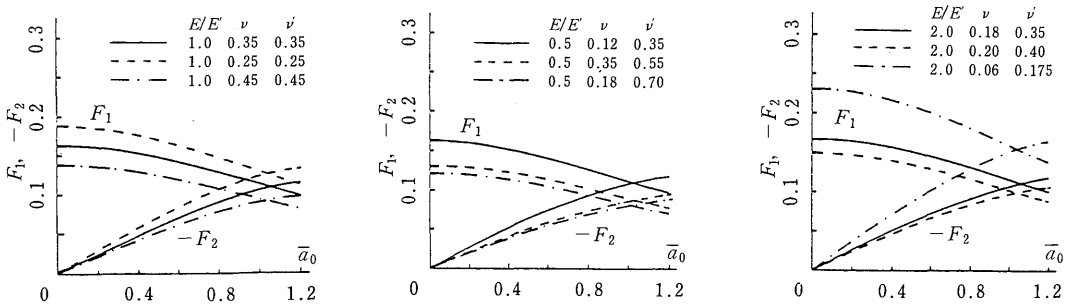


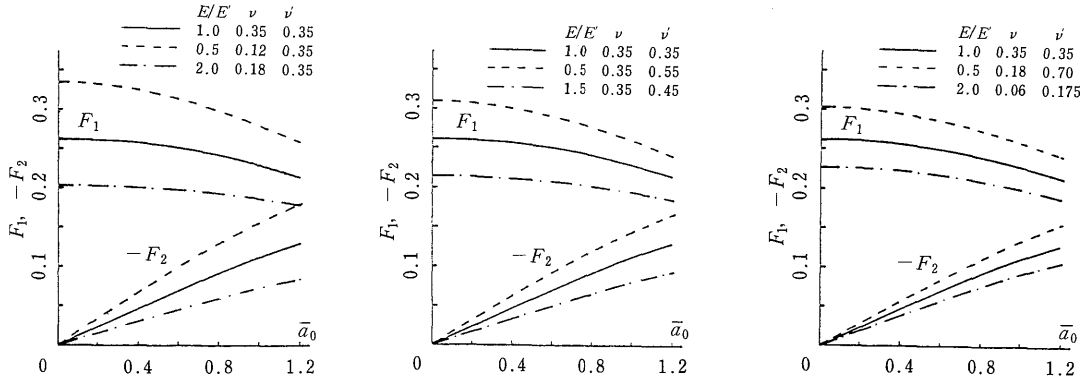
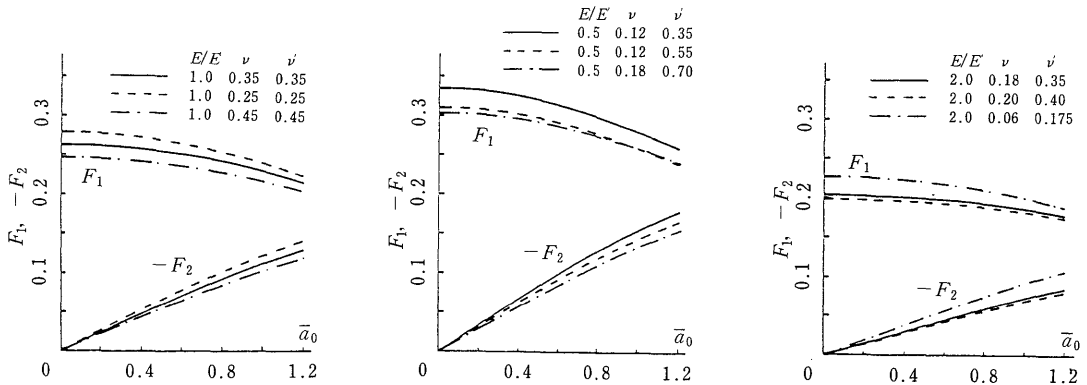
図-3(b) 回転動の振動アドミタンス

の振動アドミタンスは動変位式の〔 〕内が同じ形となるため、接地圧の違いによる差のみが図に現れることになる。また、 $A_0 = 0$ すなわち $\omega = 0$ の時は静的加力の場合の変位を示しており、解に現れる虚数部 f_2 は波動現象による見かけ上の減衰に関する項である。これは地盤を半無限弾性体と見なすことによる波動の逸散すなわちエネルギー減衰を示すものである。

図-4～図-6は $D.G.C.$ を表したもので、無次元振動数 $\bar{a}_0 = \omega r_0 / V_s$ を関数としたものである。この場合は F_1, F_2 も弾性係数及び近似値 Γ_1 の影響を受けており、地盤の物理的性質が波動に及ぼす影響を直接図から読み取ることができる。図-4(a), (b) は上下動の接地圧が剛板分布の場合を、図-5(a), (b) は水平動の接地圧が一様分布の場合を、図-6(a), (b) は回転振動の接地圧が三角形分布の場合を剛性比 (E/E') の違いとポアソン比 (ν, ν') の違いによって比較したものである。 $E/E' = 1.0$ は等方性体であり、上下動、回転振動の場合、振動特性に与える影響は剛性比よりポアソン比の方が大きく、剛性比の影響は $E/E' > 1.0$ で顕著となる。水平動の場合は、ポアソン比よりも剛性比の違いによる方が $D.G.C.$ に与える影響が強く、剛性比 $E/E' < 1.0$ の時の方が値が大きくなる傾向を示している。

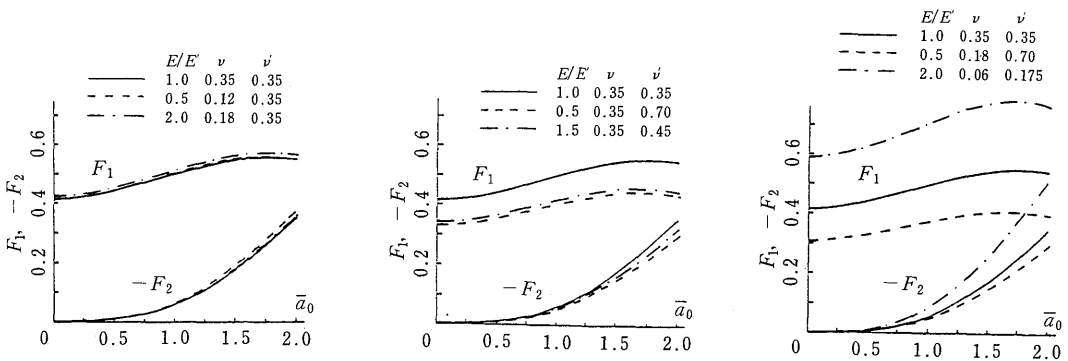
図-7は接地圧の違いによる $D.G.C.$ を比較したもの

図-4(a) 剛性比の違いによる上下動のD.G.C.
(接地圧が剛板分布の場合)図-4(b) ポアソン比の違いによる上下動のD.G.C.
(接地圧が剛板分布の場合)


 図-5(a) 剛性比の違いによる水平動のD.G.C.
(接地圧が一様分布の場合)

 図-5(b) ポアソン比の違いによる上下動のD.G.C.
(接地圧が一様分布の場合)

である。上下動、水平動とも接地圧の違いは実数部で著しく、減衰に関係する虚数部はあまり影響を受けていない。この実数部の差は、変位を求めた点が円形基礎中心点であることから、接地圧の大きさに比例した値となり、静的解に近い無次元振動数 $\bar{a}_0$ が小さい範囲では放物線分布の場合かなり大きな値を示す傾向にあり、一様分

布、剛板分布は似たような傾向を示している。回転振動の場合は、接地圧の違いが実数部、虚数部両方に見られ、剛板分布より三角形分布の方が大きな値を示し、特に構造物と地盤の動的相互作用において問題となる応答曲線の共振点が見れる $\bar{a}_0 = 1.0$ 付近の値を見ると F_1 で 1.8 倍、 F_2 で 2.8 倍の差が生じている。この接地圧の違いに


 図-6(a) 剛性比の違いによる回転動のD.G.C.
(接地圧が三角形分布の場合)

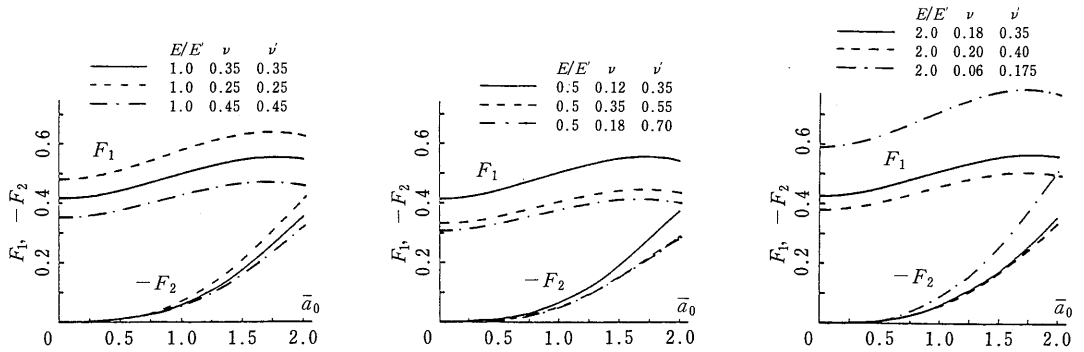


図-6(b) ポアソン比の違いによる回転動のD.G.C.
(接地圧が三角形分布の場合)

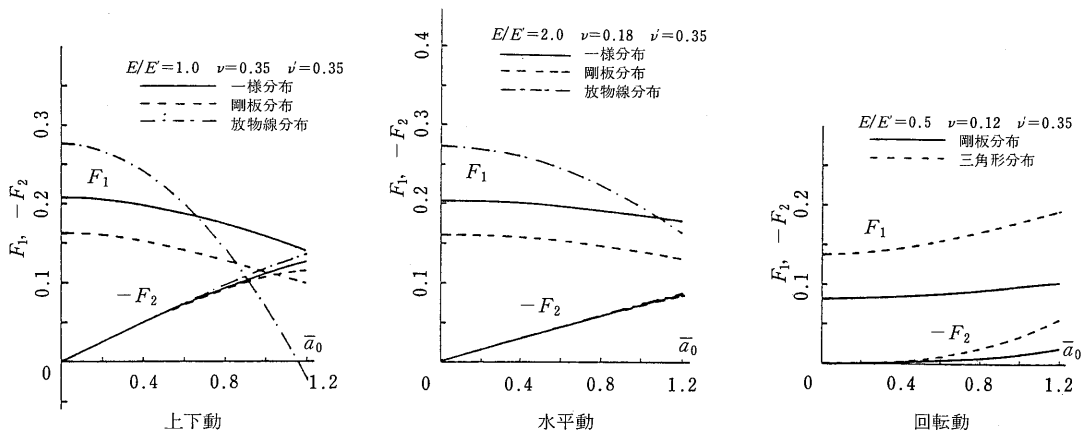


図-7 接地圧の違いによるD.G.C.

よる $D.G.C.$ の特徴は図に示していないが他の弾性地盤も同じである。

以上のことから、横等方弾性地盤上円形基礎の振動に対する $D.G.C.$ は上下動、回転振動の場合、剛性比 (E/E') が 1.0 より大きい場合剛性比の影響を若干受けるものの、ポアソン比 (ν, ν') の影響が支配的であること。逆に、水平動の場合、ポアソン比の影響は少なく、剛性比の違いによる方が値の差が顕著となる。また接地圧の違いは上下、水平動では実数部に、回転振動では実数部、虚数部に現れることがわかる。

6. まとめ

半無限横等方弾性地盤上円形基礎に上下、水平、回転の動的外力が作用する問題を、点加振解の近似式を用いる方法によって解き、数値計算によって異方性地盤の振動特性を明らかにした。解析に用いた基礎底面の反力分布すなわち接地圧は、上下、水平動では基礎底面での変形量が一定となる剛板分布 (粘性土)、放物線分布 (砂質

土) と、応力が一定となるような一様分布の 3 種類を、回転振動では三角形分布と剛板分布の 2 種類を代表的なものとして仮定した。得られた解を等方性地盤を含む 10 種類の地盤について計算した結果によれば、剛性比、ポアソン比が振動特性に与える影響は、作用外力によって異なり、上下、回転振動では 2 種類のポアソン比 ν, ν' が、水平動では剛性比 E/E' の違いが地盤の動的性質に与える影響の大きいことが明らかになった。

参考文献

- 1) Reissner, E.: Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv, Vol. 7, 1936, pp. 381~396.
- 2) Sung, T. Y.: Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loading, Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM-STP No. 156, 1953, pp. 35~63.

- 3) Quinlan, P. M.: The Elastic Theory of Soil Dynamics, Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM-STP No. 156, 1953, pp. 3~34.
- 4) Toriumi, I.: Vibrations in Foundations of Machines, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 5, No. 146, 1955, pp. 103~126.
- 5) Arnold, R. N., Bycroft, G. N., and Warburton, G. B.: Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 22, 1955, pp. 391~400.
- 6) 田治見: 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, 第8巻, 第4号, 昭和34年3月, pp. 170~215.
- 7) 妹沢: Further Studies on Rayleigh Waves Having Some Azimuthal Distribution, 震研彙報, Vol. 6, 1929, pp. 1~18.
- 8) Thomson, W. T., and Kobori, T.: Dynamical Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 30, 1963, pp. 579~584.
- 9) 山原: 弾性地盤上における基礎および構造物の振動(その1), 清水建設研究所報, 第6号, 昭和40年10月, pp. 55~80.
- 10) 小堀, 南井, 鈴木: 成層構造をもつ基礎地盤の動特性, 京大防災研究所年報第19号B, 昭和51年4月, PP. 167~217.
- 11) Gazetas, G.: Strip Foundation on Cross-anisotropic Soil Layer Subjected to Dynamic Loading, Géotechnique, Vol. 31, No. 2, 1981, pp. 161~179.
- 12) 勅使川原, 松岡: 横等方弾性体の垂直方向点加振問題に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第358号, 昭和60年12月, pp. 83~93.
- 13) 勅使川原, 松岡: 横等方弾性体の水平方向点加振問題に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第367号, 昭和61年9月, pp. 91~102.
- 14) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, 4th ed., 1927, Reprinted. New York, Dover Publications, 1944, pp. 159~160.
- 15) アムバルツミャン, S. A.: 異方性板の理論(大橋, 神谷訳), 森北出版, 昭和50年, pp. 8~14.
- 16) 最上: 土質力学, 技報堂出版, 昭和44年, pp. 292~306.
- 17) Poulos, H. G., and Davis, E. H.: Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Wiley & Sons, Inc. 1974, pp. 183~192.
- 18) Fung, Y. C.: 個体の力学/理論(大橋, 村上, 神谷訳), 培風館, 昭和45年, pp. 198~199.