

パーソナルコンピュータによる二次元有限要素解析

加 藤 章*

Two-Dimensional Finite Element Analysis on Personal Computers

Akira KATO*

(Received April 15, 1987)

Mainframe computers have been used so far for the FEM analysis, when a precise analysis is required. This is because large memory capacity and computing time are requested. In recent years personal computers have become more powerful. This paper investigates the FEM analysis of two-dimensional elastic problems on a personal computer with a 16-bit CPU (Intel 8086). Stress in a strip with a center hole or edge notches under uniform tension was analyzed. The computing language used is Turbo Pascal compiler. The data space in the main memory this compiler can use is limited to 64 kbytes. Since a large stiffness matrix is necessary for a precise analysis, the matrix cannot be made in the main memory. Thus, the matrix was stored in a RAM disk and the method to solve the stiffness equations was improved so that a large stiffness matrix could be handled at a high speed. Computing time was less than 550 s and the analyzed result agreed with the results of numerical analyses and experiments published previously. This shows that a precise FEM analysis is possible even on personal computers and the FEM on personal computers can be applied practically.

1. ま え が き

有限要素法は汎用性のある数値解析法として広く使用されているが、この方法を用いて実用的な解析を行うためには、大きな記憶容量と処理時間を要するため、これまで一般に大型計算機が用いられて来た。しかし、もしこの方法がパーソナルコンピュータ程度の計算機によって適用できれば、技術者あるいは研究者が手元にある計算機を用いて解析することができ、非常に便利であると共に、プログラム開発も能率的になる。最近のパーソナ

ルコンピュータの普及を考えれば、これは非常に重要なことと考えられる。パーソナルコンピュータによる有限要素解析のプログラムも発表されて来ているが⁽¹⁾、解析法の入門教育的なもので、規模の小さい問題を対象にした物が多い。そこで、本研究では二次元弾性問題について、現在最も普及していると考えられる、インテルの16ビットCPU、i8086を用いたパーソナルコンピュータを用いて、比較的規模の大きい問題を解析するためのプログラムを作成してみた。そして、実際に平面問題の解析を行い、その計算精度、および計算時間を調べ、パーソナルコンピュータによる解析が実用可能かを検討して

*機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

みた。

2. 計算方法

2.1 剛性方程式の計算

二次元弾性問題を有限要素法で解く場合、いま、有限要素として、最も簡単な三角形一次要素を用いるならば、まず、物体を後に述べる図6のように細かい三角形に分割する。そして、各三角形要素について頂点番号を i, j, k とし、各点の x, y 方向の変位をそれぞれ、 $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ 、また、各点の荷重を $f_i, g_i, f_j, g_j, f_k, g_k$ とすれば(図1)、各要素について次式の関係が成り立つ。

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (1)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ g_i \\ f_j \\ g_j \\ f_k \\ g_k \end{Bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

これらの関係をすべての要素について重ね合わせれば、物体全体についても同様な関係が成り立つ。

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix}$$

式(2)を全体剛性方程式、 $[K]$ を全体剛性マトリックスと言う。そして、物体に加わる外力、および固定条件を考慮に入れてこの連立方程式を解き、変位 $\{u\}$ を求めるわけである。 $\{u\}$ がわかれば、各要素のひずみ、及び応力を求めることができる。

ここで、全体剛性マトリックス $[K]$ は図2に示すようなバンドマトリックスになり、さらに、対角線に対して対称であるので、図中に示したバンドの中の要素の半だけをコンピュータに入力すれば良い。ある程度精度

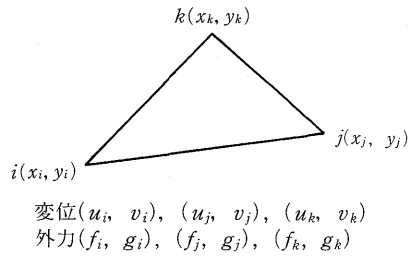


図1 三角形一次要素

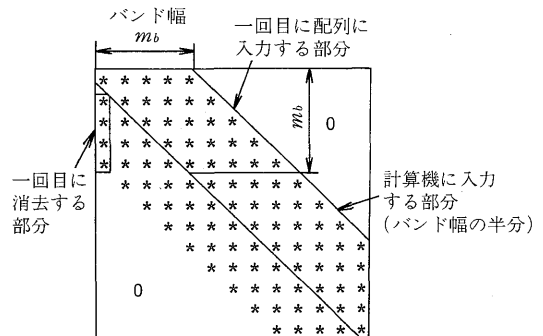


図2 剛性マトリックス

の良い結果を得るためには、要素の分割を細かくしなければならないが、その場合には、剛性マトリックスが非常に大きくなる。インテルの8086系のCPUのために一般的に使われているコンパイラには、スモール、コンパクト、ミディアム、ラージなどのメモリーモデルがあるが、これらの中で、最も大きいメモリーを扱うことができるラージメモリーモデルのコンパイラは1 Mbytesまでのデータを扱うことができるが、一つの配列として扱うことができるのは64 kbytesまでである。すなわち、倍精度計算を行うとして、配列に入力できるマトリックスの要素の個数は最大8,000個である。この程度の個数ではあまり実用的な計算はできない(図6(a)の分割の場合、約30,000個である)。64 kbytes以上の配列を扱うためにはヒュージメモリーモデルのコンパイラを用いなければならないが、そのようなコンパイラは現在のところ少ない。そこで、ここではコンパイラとして最も安価なスモールメモリーモデルのものでも計算できるようなプログラムを作成してみた。

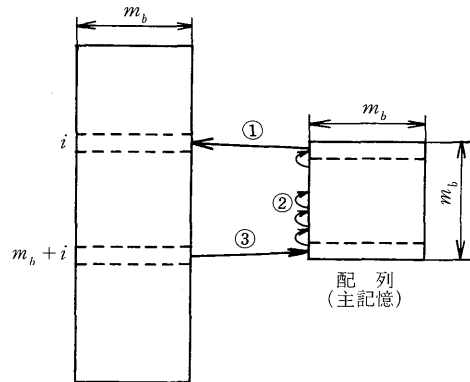
スモールメモリーモデルでは、扱うことのできるデータ領域の大きさは64 kbytesであるので、プログラムの中で扱える配列の大きさはそれよりも小さい。したがって、配列の中に全体剛性マトリックスの要素を全て入れることはできない。そこで、外部記憶装置に全体剛性マトリックスを作成しなければならない。しかしながら、

本プログラムでは、各三角形要素に関して剛性マトリックスの要素データを計算した後、外部記憶装置内にある全体剛性マトリックスのファイルの対応する箇所に、ランダムアクセスにより加えていかななければならないので、外部記憶装置との入出力の回数が非常に多くなる。したがって、できる限り高速に入出力する必要がある。たとえ、外部記憶装置としては比較的高速なハードディスクを使用したとしても、このように多くのデータを入出力するのは時間がかかる。そこで、ここではコンピュータ内のメモリーの一部、あるいは拡張メモリーを外部記憶装置として扱うRAMディスクを用いることにする。これを使用すれば、内部記憶と同程度の速度で入出力を行うことができる。現在MS-DOS上で最大32 MbytesまでのRAMディスクを扱うことのできるソフトウェアが市販されている。それだけの容量があれば、メモリーの制約は考えなくて済む。

RAMディスク上に剛性マトリックスを作成した後、式(2)の剛性方程式を解くわけであるが、次のような方法で解くことにする。消去法で解くとすれば、図2のマトリックスの左下半分を消去すれば良いわけである。ここでは、コンピュータの記憶容量を少なく、かつRAMディスクのアクセスを少なくして、高速処理できるように次のような方法を採用した。

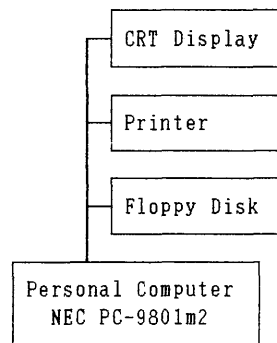
剛性マトリックスのバンド幅を m_b とした場合、コンピュータの主記憶に $m_b \times m_b$ の配列を確保し、まず、最初の $m_b \times m_b$ の剛性マトリックス要素をRAMディスクから配列に入力する。この配列を用いて、図2の剛性マトリックスの左下一列目の部分を消去する。次に一行目の配列要素をRAMディスク内の剛性マトリックスの一行目に戻し、配列内の要素を一行ずつ繰り上げる。そして、空いた配列の最下行にRAMディスク内の剛性マトリックスの $m_b + 1$ 行目の要素を入力する。この配列を用いて剛性マトリックスの対角線の左下二列目を消去する。そして、配列の一行目をRAMディスク内の剛性マトリックスの二行目に戻し、配列の要素を一行ずつ繰り上げて、最下行に剛性マトリックスの次の一行分の要素を加える。以下、同様に、配列の一行目をRAMディスク内の剛性マトリックスファイルの対応箇所に出力し、RAMディスクから一行を配列の最下行に入力して、順に同様な手順を繰り返して、剛性マトリックスの左下半分を消去するわけである(図3)。この方法を用いれば、コンピュータの主記憶に確保する配列の大きさは $m_b \times m_b$ だけで済む。

以上の方法で方程式を解けば、各節点の変位を求めることができる。そして、その変位から各要素の応力を計算することができる。



剛性マトリックス要素
(RAM Disk)

図3 剛性マトリックス要素の配列への入出力



CPU : 8086 (8MHz, Intel)
NDP : 8087 (8MHz, Intel)
Main Memory : 380 kbytes
RAM Disk : 400 kbytes
OS : CP/M-86 (Digital Research, Inc.)
Compiler : Turbo Pascal (Borland, Inc.)

図4 コンピュータシステムの構成

2.2 コンピュータのシステム構成

本研究で用いたパーソナルコンピュータの構成を図4に示す。パーソナルコンピュータとしてNECのPC-9801 m 2を用いた。これには数値演算用のプロセッサ(i8087)が付加されている。メインメモリーは640 kbytesであるが、グラフィック用のVRAM 192 kbytesと合わせて、約380 kbytesをコンピュータの主記憶に、約400 kbytesをRAMディスクとして用いた。オペレーティングシステムはCP/M 86(デジタルリサーチ社)、プログラム開発用のコンパイラとしてターボパスカ(ボーランド社)を用いた。

3. 切欠き、あるいは円孔を持つ帯板の応力解析

いま、図5(a)のような半円形の切欠き、及び(b)のよ

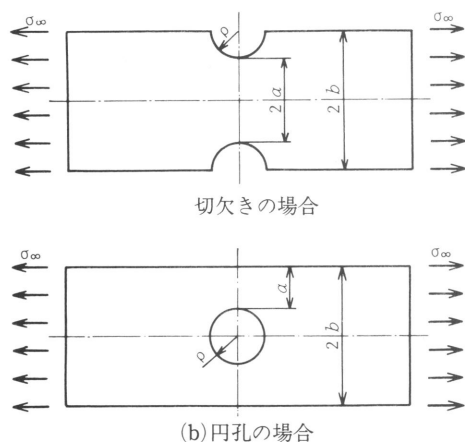


図5 引張りを受ける帯板

$\rho = 40 \text{ mm}$, $a = 60 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$,
 $\sigma_{\infty} = 0.6 \text{ MPa}$

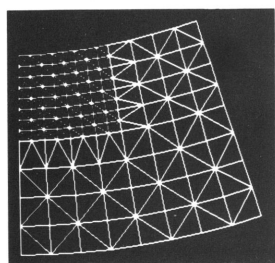
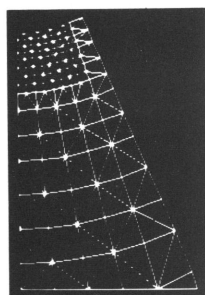
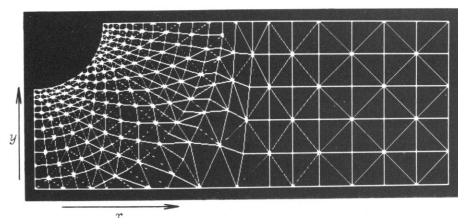


図6 要素分割

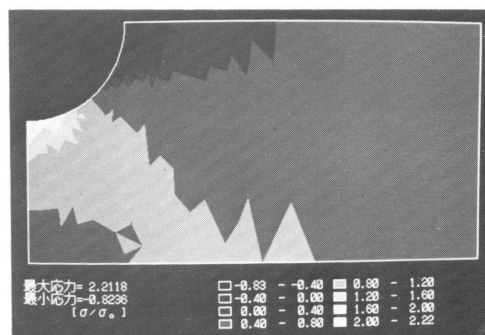
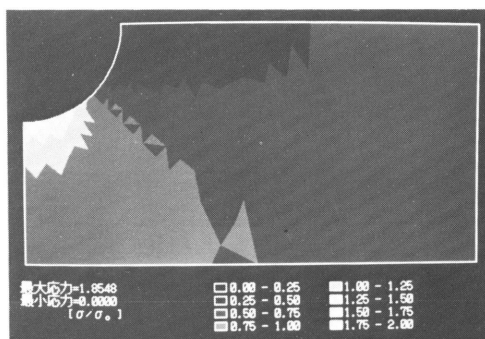


図7 応力分布のグラフィック表示

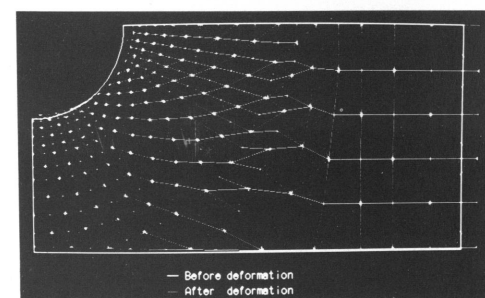
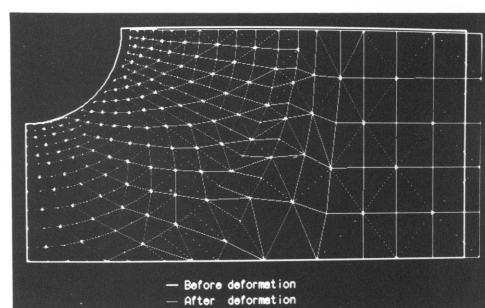
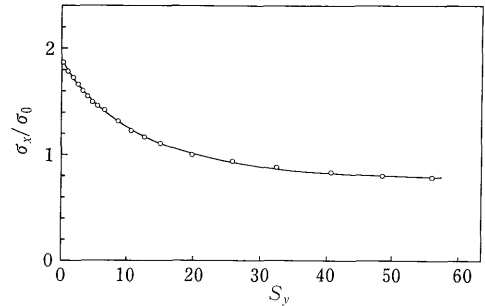
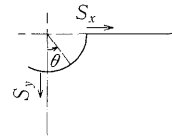


図8 変形図

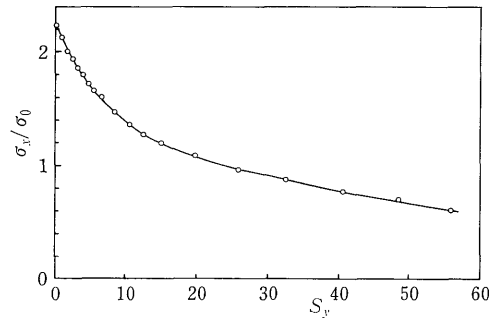
うな円孔を持つ帯板が引張りを受ける場合について考える。対称性から、この帯板の $1/4$ を考えればよい。いま、一例として、 $\rho=40$ mm, $a=60$ mm, $b=100$ mm の場合を考える。応力分布の変化が大きいと推定される円の周辺は分割を細かく、それから離れるほど粗くして、要素分割を図 6 (a) のようにとる。この場合の要素数は 568, 節点数は 322 である。そして、荷重は $\sigma_\infty=0.6$ MPa, すなわち合力が 60 N になるように板の右端の各節点に加えるものとする。固定条件として、図 6 (a) の要素分割図で左端の各節点を x 方向に、下の面を y 方向に固定すれば、切欠きの場合、そして左端の各節点を x 方向に、上の面を y 方向に固定すれば、円孔の場合の問題を解析することができる。計算はすべて有効桁数 16 桁の倍精度で行った。

図 7 (a) (b) に、それぞれ切欠き、円孔の場合について解析によって得られた応力分布を示す。これらの図は各要素の応力の大きさを 8 段階の明るさで CRT ディスプレイに示したものである。また、図 8 (a) (b) は変形の様子を示す。

応力の大きさの概略の値を求めるのにはこれで十分であろうが、切欠き底の応力の正確な値を求めるには、図 6 (a) 程度の粗い分割では十分ではない。そこで、図 6 (b) に示すような、円の下部の領域だけを取り出して考え、図の細線で示したように、切欠き底近傍の部分を細かく分割して、再度計算を行う。その際の荷重条件としては、右側の各節点に、図 6 (a) の分割によって得られて



(a) 切欠き



(b) 円孔

図 9 y 軸上の応力分布

表 1 要素分割と応力集中率の関係

(a) 切欠きの場合

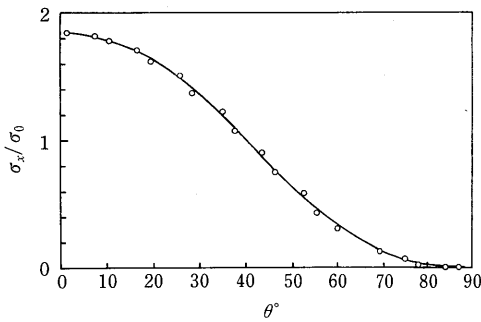
$\Delta l/\rho$	k	f
0.075	1.8542	60.0
0.0375	1.8592	59.9444
0.01875	1.8626	59.9378
0.009375	1.8645	59.9370
0.004688	1.8655	59.9369
0.002344	1.8660	59.9369

(b) 円孔の場合

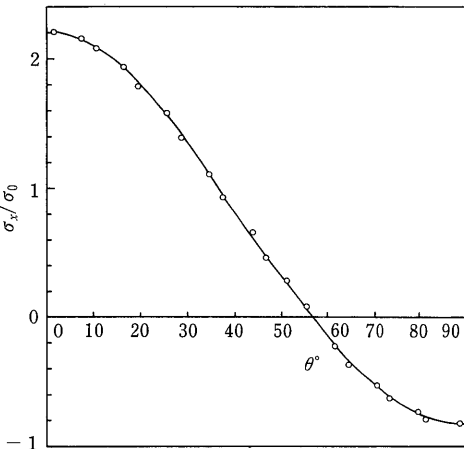
$\Delta l/\rho$	k
0.075	2.2114
0.01875	2.2299
0.004688	2.2347
0.002344	2.2355

いる対応する各点の変位を与えるものとする。さらに、同じく図 6 (b) の領域を用いて、図 6 (c) に示すように、切欠き部分のみ、分割を順に細かくして計算を行う。表 1 (a) (b) に分割の大きさを変えた場合の計算結果を示す。ここで、 Δl は最小要素の一辺の長さである。 k は溝底の最大応力 $\sigma_{\max}$ を溝底部分の公称応力 σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_\infty b/a$, この場合には $\sigma_0 = 1$ MPa) で割った応力集中率である。表の一行目の結果は図 6 (a) の要素分割によるものである。 $\Delta l/\rho$ が 0.009375 以下になれば、 k の違いは極めて小さくなり、この程度の分割であれば、十分精度の良い値が得られることがわかる。切欠きの場合について、最も分割が細かい時の応力集中率は 1.8660 である。この場合の要素数は 631, 節点数は 353 であった。

この場合、負荷条件として変位を与えているため、荷重の合力に誤差が生じるおそれがある。そこで、切欠きの場合について、各分割における切欠き底の断面上 ($x=0$) の合力を求めると、表 1 (a) の右欄のようになる。この合力の真の値 f_0 は 60 N であるが、得られた値はこれよりもほんのわずかに小さい。しかし、その違いはきわめ



(a) 切欠き



(b) 円孔

図 10 円の周辺上の応力分布 (σ_1 : 主応力)

て小さく、 f_0 に対して 0.1%程度である。したがって、これによる応力集中率 k に対する影響は、表 1 (a)の $\Delta l/\rho$ が最も小さい場合の k の値 1.866 が 1.868 になる程度であるので、ここではこれを無視するものとする。これらの計算結果から、切欠き、および円孔の場合の y 軸上、及び円の周辺上の応力分布はそれぞれ図 9 (a) (b)、及び図 10 (a) (b)に示したようになる。

寸法の異なる切欠き、あるいは円孔に対しても計算を行ってみた。計算値を表 2 (a) (b)に示す。応力集中率と ρ/b の関係を図 11 (a) (b)に示す。図の (a), (b)における $\rho/b=0$ の●はそれぞれ、切欠きをもつ半無限板⁽²⁾、および円孔をもつ無限板⁽³⁾の理論解である。切欠きの場合について、西谷らが体積法を用いて計算した結果も合わせて示してあるが⁽⁴⁾、本計算結果は西谷らの値とほとんど一致していることが分かる。円孔の場合についても、これまでに得られている理論解⁽⁵⁾あるいは実験結果⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾と比較してあるが、それらの結果と本結果とがかなり近いことが分かる。特に、Howland の理論解、西田の実験結果とは広い範囲で良く合っている。以上の結

表 2 応力集中率の計算値

(a) 切欠きの場合

ρ/b	k
0.1	2.7407
0.2	2.4208
0.3	2.1292
0.4	1.8660
0.5	1.6359
0.6	1.4222
0.7	1.2640
0.8	1.1510
0.9	1.0649

(b) 円孔の場合

ρ/b	k
0.1	2.7287
0.2	2.5103
0.3	2.3466
0.4	2.2355
0.5	2.1562
0.6	2.1015
0.7	2.0603
0.8	2.0088
0.9	1.9085

表 3 計算時間

	8087あり (16桁)	なし (11桁)
(a)	8分50秒	12分48秒
(b)	7分12秒	—

(a) 図 6 (a) の分割

(b) 図 6 (c) の分割

果から、パーソナルコンピュータを用いて行った本解析結果は十分の精度を持っていると言える。

図 6 (a)の場合と、図 6 (c)の中で最も分割の細かい場合、すなわち表 1 の $\Delta l/\rho$ が 0.002344 の場合についての計算時間を表 3 に示した。ここに示した計算時間は、この解析の中で、ほとんどの時間を占める剛性マトリックスを作成して、連立方程式を解くまでの時間である。表の (a)の場合については、浮動小数点演算用の数値データプロセッサ i 8087 がある場合とない場合の計算時

間が示してあるが、両者の間にそれほど大きな違いはない。本解析プログラムの中には関数計算ではなく、浮動小数点演算を行っている部分は四則演算だけで、比較的少ないので、i8087の効果は小さいようである。しかし、i8087を用いた場合には有効桁数が16桁であるのに対して、用いない場合には11桁であるのを考えれば、i8087による速度上昇の効果は、本プログラムの場合、約2倍程度と考えられる。ここで、(b)の場合の方が(a)

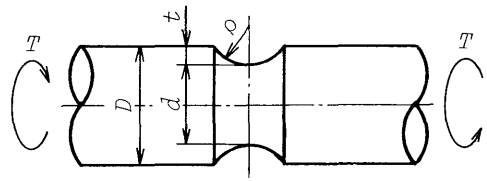
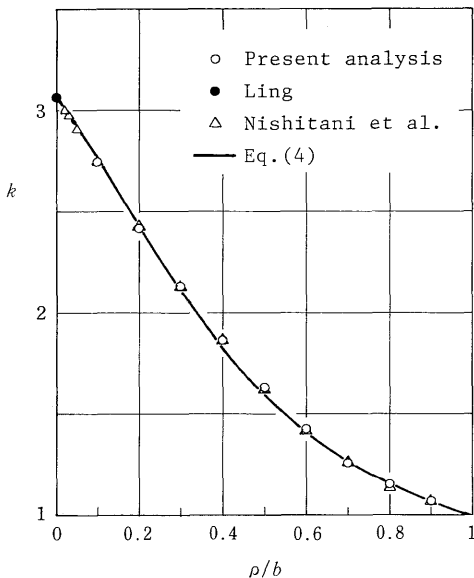
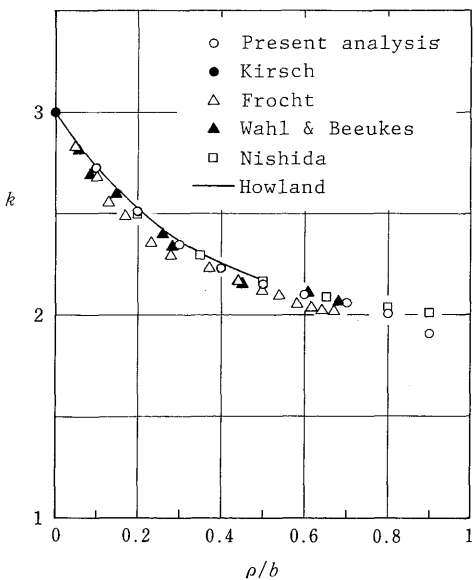


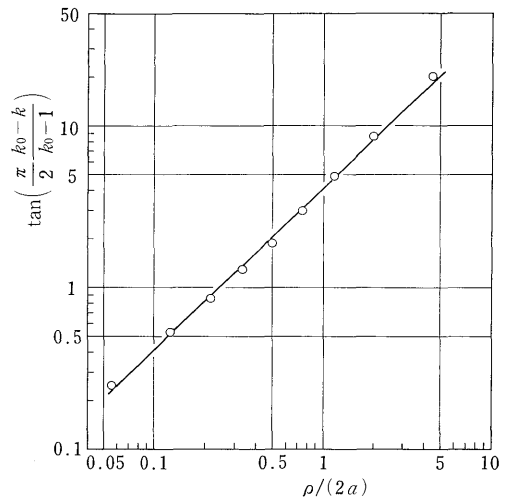
図12 円周溝をもつ丸軸



(a) 切欠き



(b) 円孔

図11 ρ/b と応力集中率の関係図13 $\tan \{(\pi/2)(k-k_0)/(1-k_0)\}$ と $\rho/(2a)$ の関係

の場合よりも要素数、節点数共に多いにもかかわらず、計算時間が短い、これは(b)の場合の方が剛性マトリックスのバンド幅が小さいためにコンピュータへ入力するデータ数が少なくなったためである。計算時間はどちらの場合も10分以内であり、パーソナルコンピュータとしては十分に速いことがわかった。計算時間は計算機に入力する全体剛性マトリックスの要素個数によって決まる。表3(a)の場合、計算時間が8分50秒であるが、いま、実用可能な計算時間として1時間まで許すとすれば、この場合の約7倍程度の剛性マトリックスを扱うことができる。すなわち、これよりもかなり要素分割を多くすることができ、非常に精度の良い解析を行えることになる。

4. 設計公式

著者は、すでに円周みぞを持つ丸軸(図12)のねじりによる応力集中率に対する設計公式を報告したが⁽¹⁰⁾、それと同じ方法を用いて、切欠きをもつ帯板の場合についても設計公式を導いてみた。

この設計公式は次式

$$k = k_0 + (1 - k_0) (2/\pi) \tan^{-1} \{B(\rho/d)^c\} \quad (3)$$

で表される。ここに、 k_0 は $\rho/d \rightarrow 0$ のときの k の値であ

り、切欠きを持つ帯板の引張りの場合には $k_0=3.065$ になる⁽²⁾、また、丸軸の最小直径 d は帯板の場合には $2a$ に置き換えられる。いま、切欠きの場合について、有限要素法による計算結果から $\tan \{(\pi/2)(k-k_0)/(1-k_0)\}$ と $\rho/(2a)$ の関係を調べると、図 13 に示すように、直線関係があり、式 (3) が成り立つことがわかる。これらの関係から式 (3) の係数 B 、 C を最小自乗法によって求めると、それぞれ $B=4.177$ 、 $C=1.004$ になる。図 11(a) の曲線はこの設計公式から導いたものであるが、本計算結果、および西谷らの計算値にきわめて良く合っていることがわかる。 k_0 、 B 、 C の係数の値を与えれば、丸軸のねじりの場合も帯板の引張りの場合も全く同じ形の式 (3) で応力集中率が計算できることになる。

5. むすび

本研究では、一般に広く使用されている、16 ビットのパーソナルコンピュータを用いて比較的規模の大きい二次元有限要素解析を行うためのプログラムを作成してみた。本研究で用いた 16 ビット CPU (i 8086) 用のスモールメモリーモデルのコンパイラでは配列の大きさをあまり大きく取れないので、外部記憶装置として使用した RAM ディスクの中に剛性マトリックスを作成し、また、連立方程式の計算を工夫することにより、かなり大きな剛性マトリックスを、高速に扱えるようにした。実際に、切欠き、あるいは円孔を持つ帯板が引張りを受ける場合の問題を計算してみた。そして、十分な精度で、かつ実用に耐える程度の時間で計算できることがわかつ

た。

また、円周溝をもつ丸軸に対して著者が導いた設計公式を本研究の切欠きをもつ帯板に対しても適用してみたが、同じ形の式がなりたつことがわかった。本研究によって求めた切欠きを持つ帯板に対する応力集中率の公式をまとめれば次のようになる。

$$k=k_0+(1-k_0)(2/\pi)\tan^{-1}[B\{\rho/(2a)\}^C] \quad (4)$$

ここに、

$$k_0=3.065, B=4.177, C=1.044$$

である。

参 考 文 献

- 1) 戸川, マイコンによる有限要素解析, (昭 60), 培風館.
- 2) Ling, C.B., J. App. Mech., Vol.14(1947), 275.
- 3) Kirsch, G., V.D.I., Bd.42(1898), 797.
- 4) 西谷, 野田ほか 2 名, 機論, 51-467 A(昭 60), 1804.
- 5) Howland, R.C.J., Phil. Trans. Roy. Soc., A, Vol. 229(1930), 48.
- 6) Coker, E.G., Proc. Phys. Soc., (1912), 95.
- 7) Wahl, A.M. and Beeuwkes, R., Trans. ASME, Vol. 56(1934), 617.
- 8) Frocht, M.M., Mech. Engng., Vol 58(1936), 485.
- 9) 西田, 科研報告, 28-1(昭 27), 30.
- 10) Kato, A., J. Strain Analysis, 21-4(1986), 205.