

はり-柱の耐荷力における換算モーメントの二・三の考察

西川 俊一*, 塩見 弘幸**, 倉田 宗章**

Some Considerations on Equivalent Uniform Moment for Ultimate Strength of Beam-Columns

Syun-ichi NISHIKAWA*, Hiroyuki SHIOMI** and Muneaki KURATA**

(Received March 29, 1982)

Computer simulation tests on an equivalent uniform moment where the beam-columns are subjected to unequal end moments are reported. The computer simulations were carried out about the ultimate strength of uniform and tapered prismatic beam-columns in and out of the plane of symmetry and took account of a variety of the residual stress distributions and reduction of rigidity of the cross section.

The results of calculation are compared with the recommended equation which is derived from an elastic solution. In the case of tapered beam-columns, an equivalent uniform moment obtained from the computer simulation agrees with Massonnet's recommendation in the region of application of suitable end moment ratio.

1. まえがき

部材の両端に大きさの異った曲げモーメントが作用する場合、曲げモーメントの大きい方には、換算係数が乗ぜられ、等モーメントが作用した場合と同じ効果が得られるように取扱われる。この等モーメントは換算モーメントと呼ばれ、はりおよびはり-柱部材の耐荷力の推定式に用いられることは周知である。等断面はり-柱部材に関する換算モーメントについては、過去に多くの研究があり、種々の近似式が提案されている。しかしながら、ほとんどの提案式は弾性解析の結果をそのまま用いており、文献6)のみが残留応力を考慮した弾塑性解析を面内耐荷力について行い、提案式との比較を行っている程度である。一方、変断面はり-柱部材に関する換算

モーメントについては、Rayleigh-Ritz Method による弾性解¹⁾があるのみで、弾塑性解析については行われていない。そこで、まず換算モーメントに関する既往の研究について述べ、次いで弾塑性解析の立場から従来提案された換算モーメントについて検討を加えるため次の項目について数値解析を行い、その結果について考察を行った。

(1) 等断面はり-柱部材に関する面内および面外耐荷力。

(2) 変断面はり-柱部材に関する面内および面外耐荷力。

(1)については Fig. 1-(a) に示すように中心軸圧縮荷重Pと両端において端モーメント M_1 と M_2 を受ける圧延形等断面はり-柱を想定し、面内耐荷力に対してはモーメント-曲率-軸力関係を用いた数値積分法、面外耐荷

*工学研究科建設工学専攻 (Department of Civil Engineering)

**土木工学科 (Department of Civil Engineering)

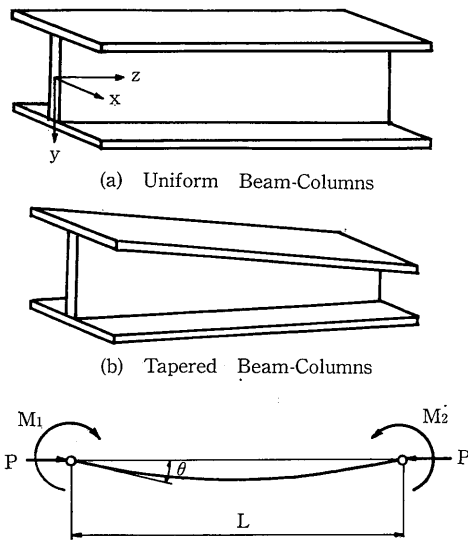


Fig. 1 Model of Analysis

力に対しては、曲げねじれ座屈に関する微分方程式を用いた伝達マトリックス法により、端モーメント比、細長比をそれぞれ変化させて解析を行った。

変断面はり-柱部材に対しては Fig. 1-(b) に示すようにウェブ高さのみ直線変化するモデルを考え、等断面の場合と同様に端モーメント比および小断面における細長比を変化させた場合について計算し、換算モーメントを評価した。

2. 換算モーメントに関する既往の研究

等断面部材の面外耐荷力については、Michael R. Horne²⁾ が軸力と主軸回りに端モーメント M_1 と M_2 ($M_1 > M_2$) を受ける長さ L の一軸対称 I 形断面柱を考え、energy method を用いて座屈に関する解を誘導した。その解を用いて、はりに関する不等端モーメントの影響を考慮するため、そり剛性零と無限大のそれぞれについて、換算係数を求め、モーメントとして安全側をとるものを採用した。

Mario G. Salvadori³⁾ は不等端モーメントを受けるはりの横倒れ座屈解を Rayleigh-Ritz method によって誘導し、端モーメント比 $\alpha = 1.0, 0.5, 0, -0.5$ および -1.0 と種々の細長比に対して計算を行った。この結果を基に細長比 $L/r = \infty$ に対する値を最小に、 $L/r = 0$ に対応する値を最大にとり、その中間値的な値、つまり、 $L/r = 40$ に対応する値を換算係数 C_m として次の近似式を提案した。

$$C_m = \frac{1}{1.75 - 1.05\alpha + 0.3\alpha^2} \quad \dots(4)$$

また、解析手法は Salvadori と同じ Rayleigh-Ritz method を用いているが、実験的検証を行ったのが Charles Massonnet⁴⁾ である。

Massonnet は偏心軸圧縮荷重を受ける柱に対し解析し、その結果より換算係数を次式とした。

$$C_m = \sqrt{0.3(1 + \alpha^2) + 0.4\alpha} \quad \dots(5)$$

次に実験変数として、(1) 端偏心比 $e_2/e_1 = 1, 0, -1$ (2) 弱軸に関する細長比 $L/r_y = 40, 60, 80, 100, 130, 175$, (3) 核半径と偏心距離 e_1 の比 $m = 0.5, 1, 3$ の場合について行い、次の相関式を提案した。

崩壊が部材端において生ずる場合

$$M = M_p \quad P/P_y \leq 0.15 \quad \dots(6-a)$$

$$M/M_p = 1.18(1 - P/P_y) \quad P/P_y > 0.15 \quad \dots(6-b)$$

崩壊が部材内において生ずる場合

$$\frac{P}{P_0} + \frac{M_1 \cdot C_m}{M_0(1 - P/P_E)} = 1 \quad \dots(7)$$

ここに M_p は塑性モーメント、 P_y は降伏軸力、 P_0 は曲げモーメントが存在しないときの軸力だけによる崩壊圧縮力、 P_E は Euler の座屈荷重、 M_0 は単純曲げに対する崩壊モーメントを表わす。

一方、面内耐荷力については Stephenson and Cloninger が不等端モーメントを受けるはり-柱に対して、セカント公式を用いて平均圧縮応力を導き、換算係数を2つのパラメーター、すなわち、端モーメント比 α と平均圧縮応力/弾性限界応力の比 σ_a/σ_e の関数で表わした。しかしながら、Walter J. Austin⁵⁾ によりこれは近似的に端モーメント比 α のみの関数で表わされ、Fig. 2 に示すように上限界と下限界を持ち、ほとんどの場合、この範囲の中心で評価出来ることが明らかにされ、換算係数として次の近似式が与えられた。

$$C_m = 0.6 + 0.4\alpha \quad (1.0 \geq \alpha \geq -0.5) \quad \dots(8-a)$$

$$C_m = 0.8 + 0.8\alpha \quad (-0.5 \geq \alpha \geq -1.0) \quad \dots(8-b)$$

この近似式を Fig. 2 に破線で示す。

また、Austin は前において述べた Horne や Mas-

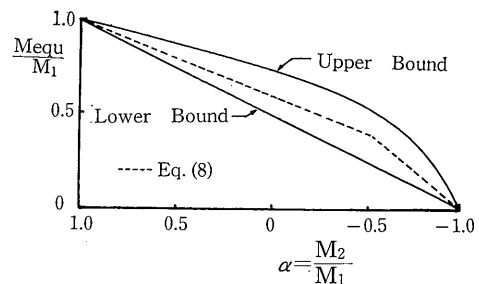


Fig. 2 Upper and Lower Bound of Equivalent Uniform Moment (Austin)

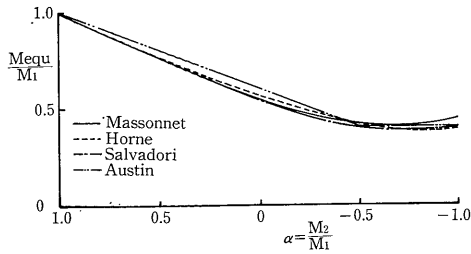


Fig. 3 Equivalent Uniform Moment Function

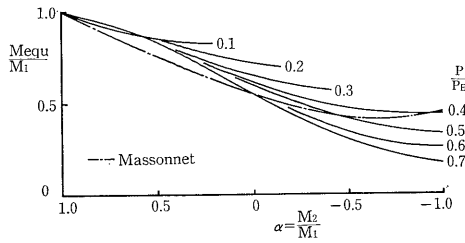


Fig. 4 Ketter's Solution

sonnet の解と比較し、すべての柱のタイプ、つまり、面外耐力力にも適用出来るように式 (8-b) を

$$C_m = 0.4 \quad (-0.5 \leq \alpha \leq -1.0) \quad \dots (8-c)$$

とした。この式は周知のように 2・3 の示方書で採用されるに到った。

以上の結果を縦軸に換算係数 $C_m = M_{equ}/M_1$ を、横軸に端モーメント比 $M_2/M_1 = \alpha$ をとって Fig. 3 に示す。

Fig. 3 に示す結果は、はりあるいは、はり-柱について弾性解析されたものである。Robert L. Ketter⁶⁾ は 8WF31 の圧延形鋼について、残留応力を考慮した弾塑性解析を数値積分法によって面内耐力力について検討を行った。その結果の一例を、Massonnet の解と比較し Fig. 4 に示す。

この図において、Massonnet の相関式 (7) よりもむしろ式 (6) によって表わされる場合、すなわち、崩壊が部材端において生ずる範囲は除外されている。Fig. 4 から、軸力 P と Euler の座屈荷重との比 P/P_E および端モーメント比 α が重要なパラメーターになっていることがわかる。しかしながら、Massonnet の解と比較すると $-0.5 \leq \alpha \leq -1.0$ の範囲において多少離れる傾向が認められるとはいえ、Massonnet の解の妥当性を証明した結果となっている。

一方、面外耐力力に関して、宇佐美⁷⁾ は不等端モーメントを受けるはりについて finite integral method を用いて、残留応力分布に圧延形と溶接形の 2 つのパターンを用いて種々の断面について耐力力を計算した。そ

の結果、換算モーメント M_{equ} に関して断面寸法はほとんど無関係であり、また、端モーメント比の違いによる影響については、無次元化細長比 $\bar{\lambda}$ が $\bar{\lambda} \leq \sqrt{2}$ の範囲において

$$(M_{cr})_{\alpha < 1} = (M_{cr})_{\alpha = 1} + 0.32(1 - \alpha) \quad \dots (9)$$

なる式を提案した。ここに、 $(M_{cr})_{\alpha < 1}$ は不等端モーメントを受けるはりの道路橋示方書⁸⁾の基準耐力力式であり、 $(M_{cr})_{\alpha = 1}$ は等端モーメントを受ける場合の基準耐力力式である。

3. 数値解析手法

面内耐力力を求める方法については多くの方法があるが、本研究では、数値積分法を用いた trial and error method により解を得る方法をとった。すなわち部材を軸方向に幾つかに分割し、一定軸力下におけるモーメント-たわみ角関係を求めるため、大きい端でのたわみ角 θ_1 に対し、大きい端のモーメント M_1 を仮定し、モーメント-曲率 ϕ -軸力 P 関係より曲率を求め、この曲率を用いてたわみ角、曲率、たわみ、モーメント間の関係式に代入する。

このようにして、順次計算を行っていくと、小さい端におけるたわみが求められ、このたわみがある許容誤差以内でなければ、再び、大きい端より、 M_1 を仮定しなおして計算を繰り返し、許容誤差以内に納まるまで行う。そして大きい端におけるたわみ角 θ_1 を徐々に大きくし、同様の計算を繰り返すことによって、耐力曲げモーメントを求める。詳細については文献 9) に譲る。

次に、面外耐力力の解析手法としては、曲げねじり座屈に関する微分方程式を用い、伝達マトリックス法による方法を用いた¹⁰⁾。

まず部材軸方向を n 等分 (本研究では $n=50$) する。各部材要素は一様断面を有し、一様な曲げモーメントが分布していると仮定し、次式の一軸対称断面の曲げ座屈に関する微分方程式を適用する。

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + (M + Py_0) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad \dots (10-a)$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - (GK_T + \bar{K}) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (M + Py_0) \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad \dots (10-b)$$

ここに、 u は x 方向変位、 ϕ はねじり角、 EI_y は弱軸まわりの曲げ剛性、 GK_T は St. Venant のねじり剛性、 $\bar{K}$ はねじりモーメントに関する係数である。これら各剛性 EI_y 、 EI_ω および GK_T は弾性域においては定数であるが、非弾性域においては P と M に支配される変数となる。これらについては、部材要素の断面を微小矩形要素に分割し、次の仮定を用い計算する。(a) 曲げ剛性およびねじり剛性は、降伏していない矩形要素によ

て構成される断面形状によって与えられる。(b) 塑性流れ理論により, St. Venant のねじれ剛性は降伏部においても同一であるとする。

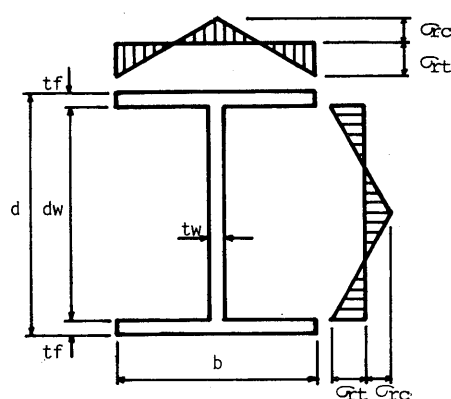
式 (10) の連立微分方程式の一般解から, 部材要素の変形量および断面力の関係が得られる。次に, 部材要素 i の左端と右端の状態量を関係づける格間伝達マトリックス F_i と格点 i での状態量の連続条件より導かれる格点伝達マトリックス P_i を用いると, はり-柱の曲げねじれ座屈条件式は次式のように表わされる。

$$[R' \cdot F_n \cdot P_n \cdot F_{n-1} \cdot P_{n-1} \cdots F_2 \cdot P_2 \cdot F_1 \cdot R] = 0 \cdots (11)$$

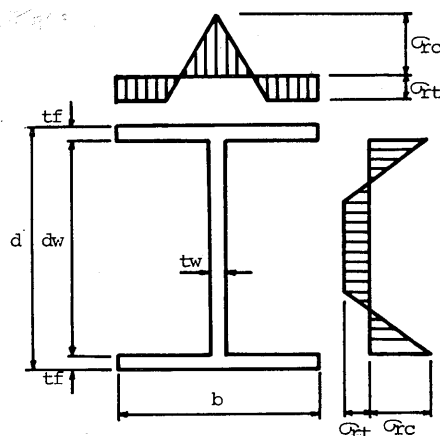
ここに R' および R は右端および左端の境界マトリックスである。

数値計算は, 太い端におけるたわみ角 θ を仮定し, 面内変形に関する $M-\phi-P$ 関係からはり-柱の曲げモーメント分布を求め, この結果を用い式 (11) を計算する。もし式 (11) が満足されなければ, これが満足されるまで θ を仮定し直して計算を繰り返し, 太い方の端断面における耐荷曲げモーメントを求める。

用いた残留応力分布は等断面はり-柱部材の場合 Fig. 5-(a) に示すような圧延形タイプのものを, 変断面の場



(a) "as-rolled" Pattern



(b) "as-welded" Pattern

Fig. 5 Assumed Residual Stress Pattern

Table-1 Dimensions of Cross-Section

No.	b(s) cm	d(s) cm	tf cm	tw cm
I	20.320	20.320	1.100	0.732
II	17.500	35.000	1.100	0.700
A	10.000	10.000	0.800	0.600
B	20.000	30.000	1.200	1.000

合, 溶接形タイプの Fig. 5-(b) に示すものを用い, 圧縮残留応力 $\sigma_{rc} = 0.3\sigma_y$ として計算した。また計算に用いた断面寸法を Table-1 に示す。表中 No. I, II は等断面例, 変断面の場合は小断面において No. A, B の 2 種の寸法例を用いた。

4. 解析結果とその考察

以上述べた解析手法および対象部材に対し, コンピュータを用い数値計算を行った。計算結果の表示は以下のように行った。

等断面の場合は台形モーメント図を矩形モーメント図

に置き換えることを目的とするため, 等端モーメントを受ける場合の耐荷曲げモーメントを不等端モーメントを受ける場合の値 M_1 で除した比 $M_{equ}/M_1 = C_m$ を縦軸に, 横軸に端モーメント比 M_2/M_1 をとって表示した。変断面の場合に対しては, 一般に曲げモーメント図は台形となるがこれを三角形モーメント図に置き換えた方が取扱上より実用的であると考えられる。したがって, 解析結果は, 端モーメント比 $\alpha = 0$ つまり片端モーメントを受ける時の耐荷曲げモーメントをそれぞれの不等端モーメントの場合に対する耐荷曲げモーメントで除した比 $M_1\alpha=0/M_1$ を縦軸に, 横軸には等断面の場合同様端モーメント比をとって表示した。

(1) 等断面はり-柱の面内耐力

Fig. 6 は断面寸法による影響を調べた図で, 図中, 実線が Table-1 に示す No. I, 破線が No. II の場合をそれぞれの細長比に対し表示し, 共に軸力比 $P/P_y = 0.3$ の結果であり, Fig. 7 は軸力比 P/P_y の異なるものについて比較した図で, 実線が軸力比 $P/P_y = 0.3$, 破線

が 0.6 を表わす。Fig. 6 より、従来から言われているように、断面寸法による影響はほとんどないことがわかるが、Fig. 7 より、軸力比および細長比が重要なパラメーターになっていることがわかる。ここで Fig. 7 において、Massonnet の解（図中の一点鎖線）と比較すると、この曲線より上にくる曲線については大差はないと思われるが、下にくる曲線のうち細長比が比較的大きい値において、Ketter も指摘したように、 $-0.5 \leq M_2/M_1 \leq -1.0$ の範囲において離れる傾向が認められる。そこで、参考のために、 $P/P_E \leq 0.4$ の範囲において次のような近似式を表わし、Fig. 8 に破線で示した。

$$\frac{M_{equ}}{M_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{M_1} + 1 \right) \quad \frac{M_2}{M_1} \geq 2 \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)^3 - 1 \quad \dots(12-a)$$

$$\frac{M_{equ}}{M_1} = \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)^3 \quad \frac{M_2}{M_1} \leq 2 \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)^3 - 1 \quad \dots(12-b)$$

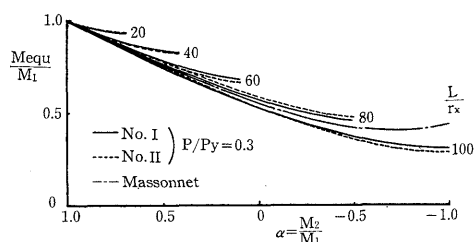


Fig. 6 Effect of Dimensions of Cross-Section

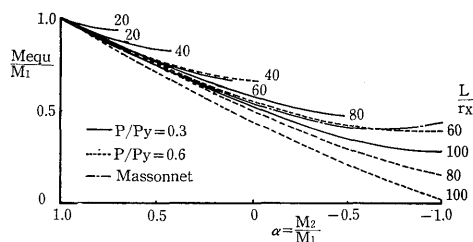


Fig. 7 Effect of Axial Force Ratio (In-Plane)

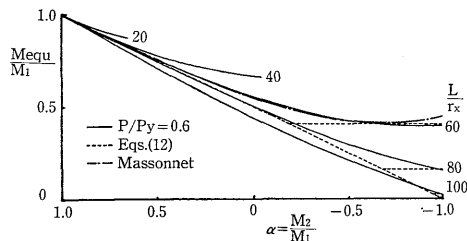


Fig. 8 Comparison of Analytical Results with Approximate Equations (12)

この近似式を用いると、比較的良好にこれらの曲線を説明できるようである。

(2) 等断面はり-柱の面外耐荷力

面外耐荷力に関しては、軸力の影響を調べるために、まず、軸力を受けない場合について、計算手法は異なるが宇佐美がはりとして解析した結果と本報における手法での軸力比 $P/P_y = 0.6$ の結果との比較を行い、Fig. 9 に示した。この図において実線が軸力比 0.6、破線が宇佐美の解を表わすが、軸力による影響がかなり大きいことがわかる。そこで、軸力比の大きさによる違いについて調べた Fig. 10 (実線が $P/P_y = 0.3$ 、破線が 0.6 を示す) から、軸力比が高く細長比が比較的大きい値は Massonnet の解に接近し、細長比の小さい範囲において M_{equ}/M_1 の値が 1 に近づく傾向を示している。しかしながら、これら細長比の小さい部材に対して、ほとんど部材端で崩壊が生じると思われるので、これらを除いて考えて見ると、Massonnet の解で十分評価出来ると考えられる。

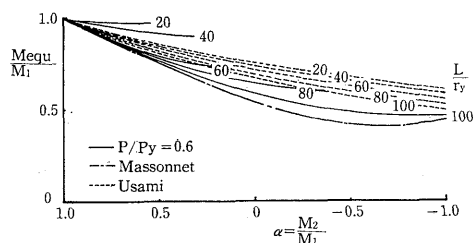


Fig. 9 Comparison of Analytical Results with Usami's Solution

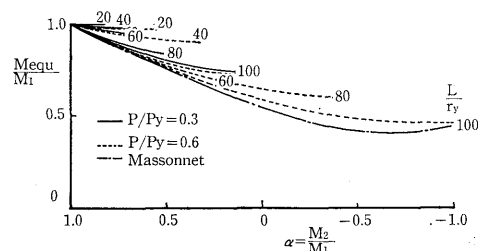


Fig. 10 Effect of Axial Force Ratio (Out-of-Plane)

(3) 変断面はり-柱の面内耐荷力

Fig. 11-(a) は Table-1 に示す断面寸法 A, Fig. 11-(b) は B の場合で共にテーパ率 $\beta = 1.4$ 、中央断面における軸力比 $P/P_y(m) = 0.3$ の結果を示したものであり、図中の細長比の値は小断面における強軸まわりの

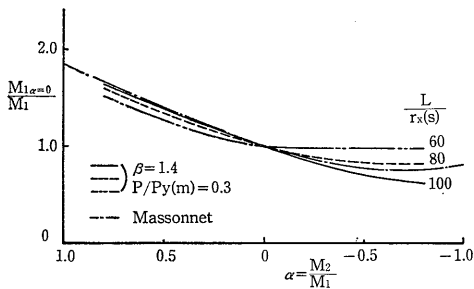
細長比 $L/r_x(s)$ を表わし、一点鎖線は Massonnet の式(5)を不等端モーメントを受ける時の耐荷力を片端モーメントを受ける時の耐荷力に換算するために変形した式

$$\frac{M_{1\alpha=0}}{M_1} = \frac{\sqrt{0.3(1+\alpha^2)} + 0.4\alpha}{\sqrt{0.3}} \quad \dots(13)$$

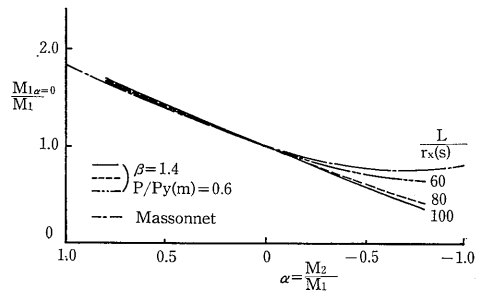
を表わす。さて Fig.11-(a) と (b) を比較すると、等断面同様、変断面の場合も断面寸法による影響はほとんどないことがわかる。

Fig. 11-(c) はテーパ比 $\beta=1.4$ 、軸力比が 0.6 の

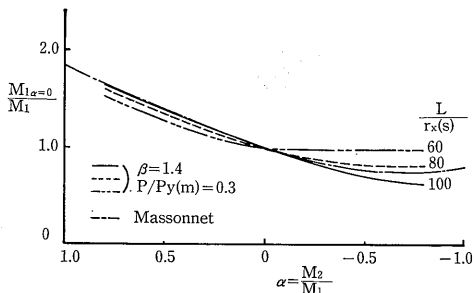
場合を、Fig. 11-(d) は $\beta=2.0$ 、 $P/Py(m)$ が 0.3 の場合を示すが、Fig. 11(a) と (c) に注目すれば軸力比および細長比による相異がわかる。さらに、変断面部材であるから、テーパ比による影響について、Fig. 11-(a) と (d) を比較して見ると多少異なってくるのがわかる。しかしながら変断面の場合、 $1.0 \geq M_2/M_1 > 0.5$ および $-0.5 > M_2/M_1 \geq -1.0$ の範囲は、考える必要はないと思われるので、 $0.5 \geq M_2/M_1 \geq -0.5$ の範囲についてのみ見ると Massonnet の解を変形した式 (13) と大差ないと思われる。



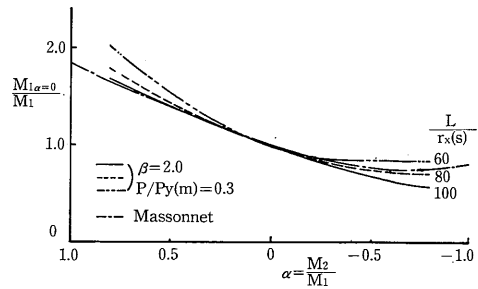
(a) $\beta=1.4$, $P/Py(m)=0.3$ and No.A



(c) $\beta=1.4$ and $P/Py(m)=0.6$



(b) $\beta=1.4$, $P/Py(m)=0.3$ and No.B



(d) $\beta=2.0$ and $P/Py(m)=0.3$

Fig. 11 Analytical Results for In-Plane Ultimate Strength of Tapered Beam-Columns

(4) 変断面はり-柱の面外耐荷力

面外耐荷力の場合についても面内同様に軸力比による違いについて Fig. 12-(a) と (b) を、テーパ比による違いについて Fig. 12-(a) と (c) を比較すると、軸力比、細長比およびテーパ比が重要なパラメーターになっていることがわかる。しかし、前記に示した様に、 $0.5 \geq M_2/M_1 \geq -0.5$ の範囲についてのみ見ると、面内より多少差は大きくなるようではあるが、式 (13) で十分評価出来ると考えられる。

5. 結論

本研究では、はり-柱部材の耐荷力を計算する場合の換算モーメントについて、H形断面を有する等断面に関するものと、ウェブ高さのみ直線変化する変断面を対象として論じた。その結果、以下の結論を得た。

(1) 従来から言われているように等断面に関して、断面寸法による影響はほとんどみられず、変断面に関しても影響は非常に小さいことがわかった。

(2) 不等端モーメントを受ける H 形等断面はり-柱

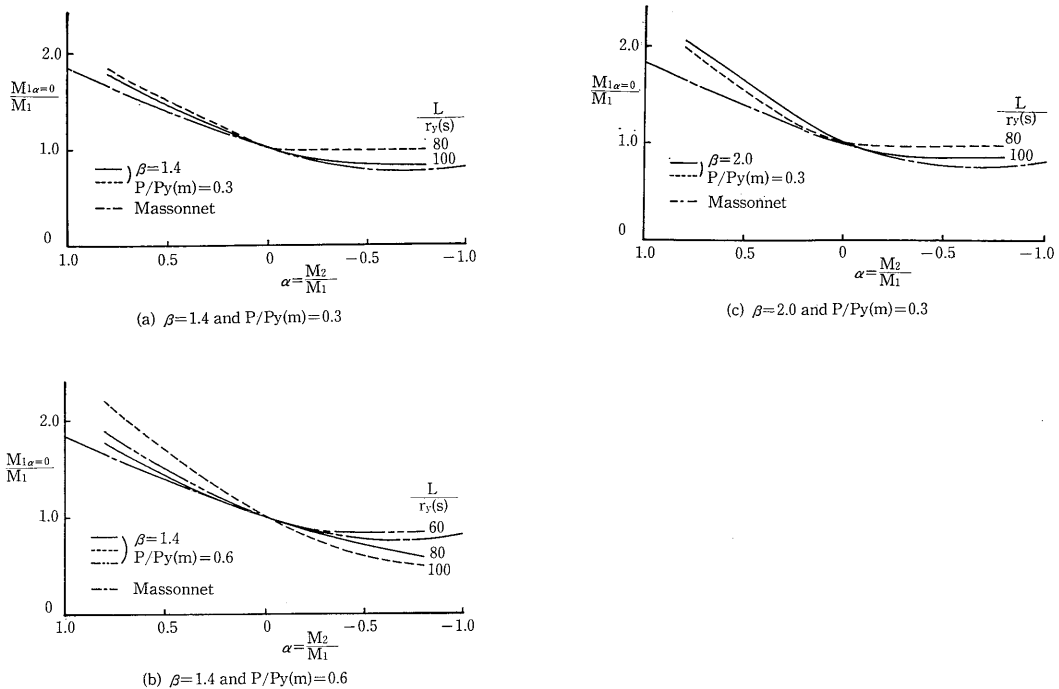


Fig. 12 Analytical Results for Out-of-Plane Ultimate Strength of Tapered Beam-Columns

部材の面内耐力に関する換算モーメントは近似式(12)を用いると $P/P_E \leq 0.4$ の範囲において比較的よく評価することが出来る。

(3) H形等断面はり-柱部材の面外耐力に関する換算モーメントは、Massonnetの式(5)で十分評価できる。

(4) ウェブ高さのみ直線変化するH形変断面はり-柱部材の不等端モーメントを受ける場合の換算モーメントは面内、面外耐力共に $0.5 \geq M_2/M_1 \geq -0.5$ の範囲において Massonnet の解を変形した式(13)で評価できる。

あとがき

本研究を進めるにあって、数値計算には元中部工業大学学生伊東茂および是洞藤雄両君には多大の御協力をいただいた。また、筆者の一人は名大工学部福本嘯士教授に貴重な助言を賜った。ここに、深く感謝する次第である。なお、数値計算には、中部工業大学情報処理センターのFACOM M-160ADを用いた。

参考文献

- 1) Lee, G.C., Morrell, M.L. and Ketter, R.L.; Design

of Tapered Members, Weld. Res. Council. Bull., No.173, 1972.

- 2) Horne, M.R.; The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments, Quart. J. Mech. App. Math., 7, 1954.
- 3) Salvadori, M.G.; Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Transactions, A.S.C.E., 121, 1956.
- 4) Massonnet, C.; Stability Considerations in the Design of Steel Columns, Proceedings, A.S.C.E., 85, No.ST 7, 1959.
- 5) Austin, W.J.; Strength and Design of Metal Beam-Columns, Proceedings, A.S.C.E., 87, No. ST 4, 1961.
- 6) Ketter, R.L.; Further Studies of the Strength of Beam-Columns, Proceedings, A.S.C.E., 87, No. ST 6, 1961.
- 7) Usami, T.; Inelastic Lateral Buckling Strength of Monosymmetric I-Girders, 岐阜大学研究報告第23号, 1973.
- 8) 日本道路橋示方書・同解説, 1972.
- 9) Shiomi, H. and Nishikawa, S.; An Interaction Formula for In-Plane Ultimate Strength of Tapered Beam-Columns, Memoirs, C.I.T., 17-A, 1981.
- 10) 吉田博, 西田進: 変断面H形鋼柱の強度と変形, 土木学会論文報告集, No.220, 1973.