

等大の2つの球形電極間の電界

小笠原万亀三郎*

Electric Field between Two Spherical Electrodes with Equal Radii

Makisaburo OGASAWARA*

(Received September 1, 1978)

A Laplace equation was solved by the use of a difference equation. Since the field is important only along the shortest path, parallel planes passing the centers of the spheres of the electrodes were taken as the boundaries. The boundary values of the electric potential were calculated by the use of the confocal hyperbolic coordinates of rotation.

1. まえがき

等大の2つの球状電極の間へ直流電圧を与え、その電圧を次第に高め、まさに放電がはじまろうとするときの電極間の電界分布をしらべようとするものである。ラプラス方程式を差分方程式の方法で解いた。両球間の最短路の近所だけの電界が重要であるので、それぞれ両極の中心を通る2つの平行平面を境界にとり、電位の境界値は同焦点双曲線座標を用いる計算によって与えた。

積分領域内でのラプラス方程式には、今の場合、直角座標や双曲線座標でなしに、円筒座標を使うのが適切である。

球の半径を a 、最短距離を $2b$ とする。図1において焦点間の距離 $FF' = 2\lambda$ として

$$2\xi = \sqrt{x^2 + (z+\lambda)^2} - \sqrt{x^2 + (z-\lambda)^2} \quad (1)$$

$$2\eta = \sqrt{x^2 + (z+\lambda)^2} + \sqrt{x^2 + (z-\lambda)^2} \quad (2)$$

なる (ξ, η) がこの座標系 (方位角 $\varphi=0$ のときの) である。

上の2式から

$$z = \xi\eta/\lambda \quad (3)$$

$$x = \sqrt{(\eta^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \xi^2)}/\lambda \quad (4)$$

が得られる。 $\xi = \text{const}$ の双曲線と $\eta = \text{const}$ の楕円 (だ円) とが直交することは容易に証明される。

$$x = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\eta^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \xi^2)} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\eta^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \xi^2)} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{\lambda} \xi \eta \text{ なる共焦点双}$$

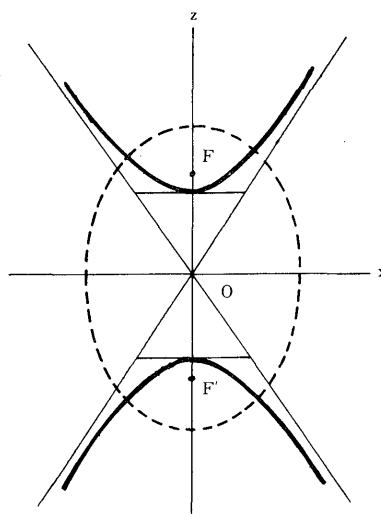


図 1

曲線座標を用いての、電位 V のラプラシアンは¹⁾

$$\nabla^2 V = \frac{\lambda}{\eta^2 - \xi^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\lambda^2 - \xi^2}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\eta^2 - \lambda^2}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\lambda(\eta^2 - \xi^2)}{(\lambda^2 - \xi^2)(\eta^2 - \lambda^2)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right\}$$

であるが、いまの場合 $(\lambda^2 - \xi^2) \frac{dV}{d\xi} = \text{const} \equiv C$

$$\therefore V = -\frac{C}{2\lambda} \log \frac{\lambda + \xi}{\lambda - \xi} + D \quad (5)$$

ここに $\log$ は自然対数、 D は積分定数である。式(1)で

*工業物理学科 (Department of Engineering Physics)

$z=0$ と置くと $\xi=0$ になるから、図1の直線 Ox 上で(図2の平面 EE' 上で) $V=0$ になるものとする、式(3)の $D=0$ 故に $V = \frac{C}{2\lambda} \log \frac{\lambda+\xi}{\lambda-\xi}$ (6)

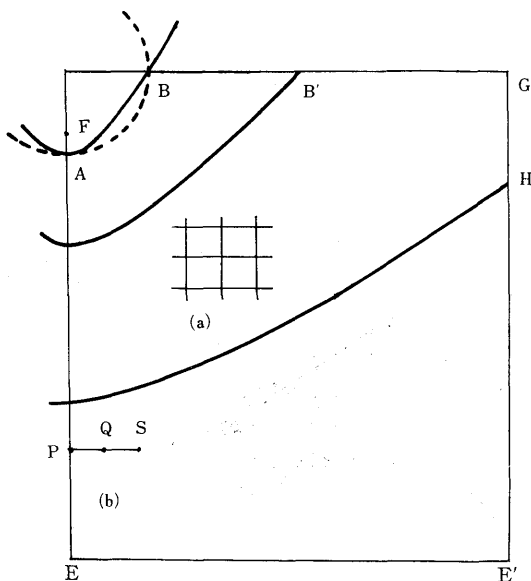


図 2

つぎに図1, 図2において, すべての双曲線に共通な焦点の位置F, あるいは λ の値(図2では $\lambda=EF$)を決定しなければならない。平面 EE' に関しての, 2点A, Eの対称点をそれぞれ A' , F' とすると, 2点A, Bを通る双曲線の ξ すなわち ξ_B は

$$2\xi = F'A - FA = A'A = 2b \text{ から} \quad \xi_B = b \quad (7)$$

$x_B = a$, $z_B = b + a$ を式(1)へ入れて

$$\lambda_B^2 + (z_B - \lambda)^2 = \{-2b + \sqrt{a^2 + (b+a+\lambda)^2}\}^2$$

これから λ が

$$\lambda = b \sqrt{\frac{2(b+a)}{2b+a}} \quad (8)$$

図2の球面AB上の電位を V_0 とすると, 式(6)から

$$V_0 = \frac{C}{2\lambda} \log \frac{\lambda+b}{\lambda-b} \text{ 故に (6) は}$$

$$V = V_0 \frac{\log(\lambda+\xi) - \log(\lambda-\xi)}{\log(\lambda+b) - \log(\lambda-b)} \quad (9)$$

となる。

図2の境界BG上の1点 B' での電位 $V_{B'}$ は, まず式(1)により

$$\xi'_B = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{x_B^2 + (b+a+\lambda)^2} - \sqrt{x_B'^2 + (b+a-\lambda)^2} \right\}$$

を求め, その ξ'_B を式(9)へ代入すればよい。

境界 GE' 上の1点Hでの電位 V_H は, $EE' = R$, $E'H = z$ として, まず式(1)により

$$\xi_H = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{R^2 + (z+\lambda)^2} - \sqrt{R^2 + (z-\lambda)^2} \right\}$$

を求め, 次に

式(9)へ代入すればよい。

以上で境界値の与え方はすべて決定したことになる。なお, 双曲線座標の使用は, 境界値設定までで打切ることとする。

2. 計算

積分領域内でのラプラス方程式の解き方は, まず領域を格子(格子定数 $=h$)にわけ。格子と言うよりはメッシュという方がよいのだが, 格子点へは左上から右下へ向かって, 縦では $I=1, 2, 3, \dots, 26$ と番号をつけ, 横では $J=1, 2, 3, \dots, 31$ と番号をつけよう。この論文の計算では $a=5$, $b=20$ とした。円筒座標系でのラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

を左上から右へ, つぎに $I=I+1$, $J=1, 2, \dots, 31$ という順序で解いて行く。なお一番初めの初期値は $V(I, J)=0.000$ として置く。計算ずみの電位は W , 未計算の電位は V と書いて区別する。図2(a)の中央の点(I, J)に対しては, W は既知, V は未知として,

$$\left\{ \frac{V(I, J+1) - V(I, J)}{h} - \frac{V(I, J) - W(I, J-1)}{h} \right\} \frac{1}{h} + \left\{ \frac{W(I-a, J) - V(I, J)}{h} - \frac{V(I, J) - V(I+1, J)}{h} \right\} \times \frac{1}{h} + \frac{1}{nh} \frac{V(I, J+1) - W(I, J-1)}{2h} = 0$$

故に $V(I, J) = W(I, J)I = \{V(I, J+1) + W(I, J-1)$

$$+ W(I-1, J) + V(I+1, J) + \frac{1}{n} \{V(I, J+1) - W(I, J-1)\} + 2.0\} + 4.0 \quad (10)$$

によって, $W(I, J)$ は計算される。ここに $n=\text{FLOAT}$ ($J-1$)は整数($J-1$), 例えば $(10-1)=9$ を 9.0 という有理数に浮動させることにする。 $J=30$ のときには式(10)でなしに, つぎの式(11)を使う。なぜなら点($I, J+1$)での電位は境界値として初めから与えてあるからである。すなわち

$$W(I, J) = \{W(I, J+1) + W(I, J-1) + W(I-1, J) + V(I+1, J) + \{W(I, J+1) - W(I, J-1)\}/2(J-1)\} + 4 \quad (11)$$

つぎに図3(c)の点 x_1 では, $x_2 - x_1 = h$, $x_1 - x_0 = \delta_1 \cdot h$ として, 一般に $V = V(x_1) + V'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} V''(x_1)(x - x_1)^2$ とすると,

$$V(x_2) - V(x_1) = V'(x_1)h + \frac{1}{2} V''(x_1)h^2,$$

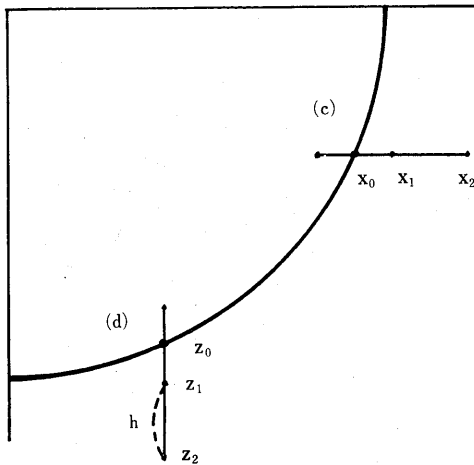


図 3

$$V(x_0) - V(x_1) = -V'(x_1)\delta_1 h + \frac{1}{2} V''(x_1)\delta_1^2 h^2$$

上の2つの方程式を解いて

$$\begin{aligned} V'(x_1) &= \frac{1}{(\delta_1 + \delta_1^2)} h [-V_0 + V(x_1) \\ &\quad + \delta_1^2 \{V(x_2) - V(x_1)\}], \\ V''(x_1) &= \frac{2}{(\delta_1 + \delta_1^2) h^2} [V_0 - V(x_1) \\ &\quad + \delta_1 \{V(x_2) - V(x_1)\}] \end{aligned}$$

したがってラプラシアンの中の $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x}$ に当たる部分は

$$\text{LAP 1} = V''(x_1) + \frac{1}{h \cdot (J-1)} V'(x_1) \dots \dots \dots (12)$$

となる。同様にして図3 (a)では、 $z_1 - z_2 = h$, $z_0 - z_1 = \delta_2 \cdot h$ として、ラプラシアンの中の $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ に当たるものは

$$\begin{aligned} \text{LAP 2} &= [V(z_0) - V(z_1) - \delta_1 \{V(z_1) - V(z_2)\}] \\ &\quad \times 2 / (\delta_2 + \delta_2^2) h^2 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。もちろん式(13)は横方向の電位勾配(こうばい)、式(12)のLAP 1と組合わされて、途中の誘導は省略するが、次の(14)式で計算されることになる。

$$\begin{aligned} W(I, J) &= \left\{ \frac{W(I, J-1) \times 2}{\delta_2 + \delta_2^2} + \frac{V(I, J+1) \times 2}{1 + \delta_2} \right. \\ &\quad + W(I-1, J) + V(I+1, J) \\ &\quad + \left. \frac{V(I, J+1) - W(I, J-1)}{2(I-1)} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{2}{\delta_2 + \delta_2^2} + \frac{2}{1 + \delta_2} + 2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

最後に、図2の(b)、または図4の点Pでの電位 $V(I, J) \equiv W$ の計算のしかたを考えよう。ラプラシアンを単位体積へ単位時間に流入する液体の体積と考えて、東西南

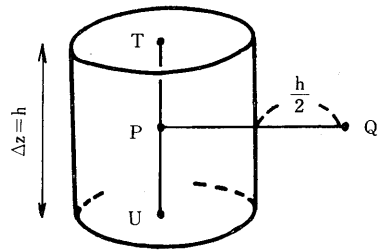


図 4

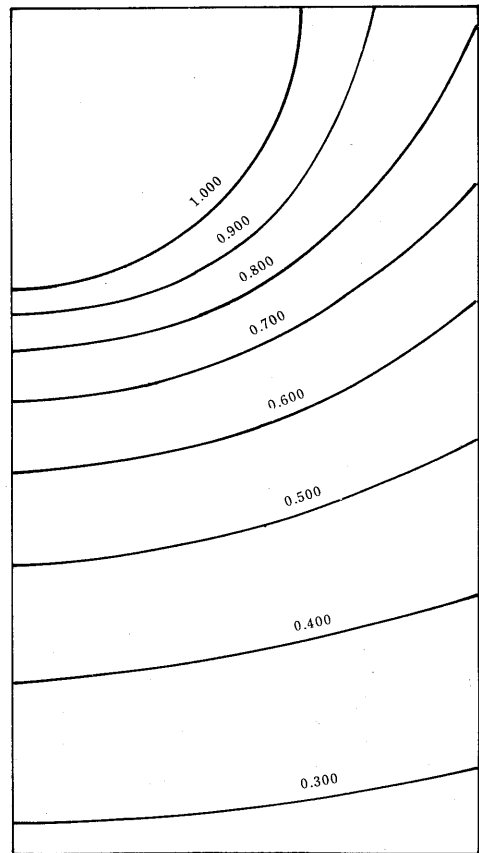


図 5

北を E, W, S, N で書くと、

$$\begin{aligned} &\frac{V(E) - W}{h} \left(dt \times 2\pi \frac{h}{2} \right) \Delta z \\ &+ \left\{ \frac{W(N) - W}{h} dt - \frac{W - V(S)}{h} dt \right\} \times \pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

この式を $dt \times \pi \times \Delta z (\Delta z = h)$ で約して、

$$W = (W(N) + V(S) + V(E) \times 4.0) / 6.0 \quad (15)$$

が得られる。

以上で積分領域内で、左上から右下へ向けての $V(I, J)$ が計算できる。もちろん、 $I=24$ に対する $V(I, J) \equiv W$

(I, J)の計算には、より南の電位は境界値値=0.0が与えてあるから、 $V(I+1, J)$ を使わずに $W(I+1, J)=0.0$ を使うのである。

$W(24, 30)$ まで計算し終わったら、 $W(2, 30)$ を $W(2, 31)$ と比べる。この論文では $V_0=1.000$ と規格化して計算しているが、もし $W(2, 30)-W(2, 31)\geq 0.0004$ ならば、初めての初期値 $V(I, J)=0.000$ を $V(I, J)=V(I, J)+(W(I, J)-V(I, J))\times AM$ (ただし $1.0\leq AM\leq 2.0$)なる新初期値に置きかえる。AMはAccelerating Multiplierと呼ばれるが、この論文では $AM=1.5$ に採った。単なる $AM=1.0$ よりはコンピューターの所要時間を短縮するのである。このような計算をコンピューターは繰返し、遂に $|W(2, 30)-W(2, 31)|<0.0004$ になったところで計算は終り、すべての格子点での電位

が小数点3桁まで決定するのである。

3. 結果および論議

結果は図5の通りである。なお、この方法はそのまま、針対平板ギャップ (point to plane gap), 実際上は1極が hemispherical rod で他極が平板の場合の電界の計算に適用できる。また、すこし工夫すれば、大きさの違う2つの球形電極間の電界の計算にも応用できることは明らかである。

文 献

- 1) 小笠原万亀三郎, 量子力学演習, 第5版, p. 38~39, 白水社