

角錐型折板構造の境界条件の取扱い及び構造特性

片 岡 靖 夫*

Treatise of Boundary Conditions and Structural Behavior of Folded Triangular Plates

Yasuo KATAOKA*

(Received September 16, 1978)

The writer has published many papers in which he has developed the theory of folded plates based on the elasticity theory, and has suggested the new analytical method of folded triangular plates applying the least square method to the point matching method. This paper shows the technique to satisfy boundary conditions necessary on the structural design and the way of its treatment. Furthermore, it discusses about the mechanical behavior of folded triangular plates through examples.

1. 序

著者は、これまでに発表した角錐型折板構造に関する一連の論文^(1~4)で、弾性論に立脚した厳密な折板理論の展開と Point Matching 法に最小二乗法を応用した折板構造の新しい解析法の提案を行ってきた。特に境界条件の適合を計るための多くの試みと誤差評価によって、本法の妥当性を証明し、さらにその応用範囲の拡大を計ってきた。本論文は、この解析法をより実用的なものとするために、角錐型折板構造の設計上必要とされる境界条件の適合法とその取扱い方を提示し、さらに各形式の折板構造のうち、実用度の高い構造への応用例を示し、その構造特性と力学的性状について論及する。

2. 境界条件の適合とその取扱い方

角錐型折板構造を対象とした著者の解析法は薄板の曲げ理論と二次元弾性理論を基礎としており、それぞれの支配方程式を厳密に満足するたわみ関数と応力関数の級数展開式を用いている。このたわみ関数と応力関数、ならびにすべての応力成分と変位成分は文献(2, 4)に示したので省略するが、この級数展開式に含まれる、合計

8種類の未定係数は、隣接板相互の接合条件と境界条件の Point Matching によって決定される。しかし、折板の構成要素である平面板固有の座標軸と境界を一致させることにより、そして級数展開式の直交性を利用することで、規則性のある未定係数間の関係式が誘導される。この未定係数間の関係式を利用した級数展開式は、その境界条件を厳密に満足すると同時に、Plate と Plane の支配方程式も厳密に満足しているので、解の精度に極めて良い結果をきたし、かつ未定係数の数を著しく減少させることができる。以下、実用上必要とされるすべての境界条件について、(i) Plate と Plane が独立にある境界条件を満足する場合、(ii) 折板の稜線上で面外応力と面内応力との間に、あるいは面外変位と面内変位との間に Coupling の生じる場合、(iii) 境界または稜線上に弾性支持ばりが存在する場合、(iv) 混合境界または点支持された境界の扱い方、に分類して、その方法と誘導結果を示す。なお、級数展開式に含まれる8種の未定係数のうち、 $a_n^1, a_n^2, b_n^1, b_n^2$ を Plate の未定係数とし、 $A_n^1, A_n^2, B_n^1, B_n^2$ を Plane の未定係数とする。さらに C_0 は z 軸方向の剛体変位量、 D_1, D_2 はそれぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の剛体変位量であり、 C_1, C_2, A_1^2 は

*建築学科 (Department of Architecture)

y 軸回り, x 軸回り, そして z 軸回りの剛体回転量である。

(i) Plate と Plane が独立に境界条件を満足する場合

a. x 軸固定条件: $y=0; w=0, \partial w/\partial y=0,$

$$2\mu(u+iv)=0$$

$$C_0=C_1=C_2=a_1^2=b_1^2=0, \quad b_3^1=-4a_3^1-\frac{q}{8}$$

$$b_n^1=-(1+n)a_n^1; (n \geq 1, n \neq 3),$$

$$b_n^2=(1-n)a_n^2; (n \geq 2)$$

$$D_1=D_2=A_1^2=B_1^2=0, \quad B_2^1=(\varepsilon-2)A_2^1$$

$$-\frac{F_x}{2(1+\nu)}, \quad B_2^2=-(\varepsilon+2)A_2^2+\frac{\nu F_y}{2(1+\nu)}$$

$$B_n^1=(\varepsilon-n)A_n^1; (n \geq 1, n \neq 2),$$

$$B_n^2=-(\varepsilon+n)A_n^2; (n \geq 1, n \neq 2)$$

ここで, q は z 軸方向面外荷重, F_x, F_y はそれぞれ x 軸方向と y 軸方向の面内荷重 (物体力) とする。また ε と μ は次の関係を用いている。

$$\varepsilon = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = E/2(1+\nu); \nu \cdots \text{ポアソン比}, E \cdots$$

ヤング率, 以下, 記号の規定は前記の約束に従う。

b. y 軸固定条件: $x=0; w=0, \partial w/\partial x=0,$

$$2\mu(u+iv)=0$$

$$C_0=C_1=C_2=a_1^2=b_1^2=0,$$

$$b_n^1=\{n-(-1)^n\}a_n^1; (n \geq 1)$$

$$b_n^2=\{n+(-1)^n\}a_n^2; (n \geq 2)$$

$$D_1=D_2=A_1^2=B_1^2=0, \quad B_2^1=(\varepsilon+2)A_2^1$$

$$+\frac{\nu F_y}{2(1+\nu)}, \quad B_2^2=(2-\varepsilon)A_2^2-\frac{F_y}{2(1+\nu)}$$

$$B_n^1=\{n+(-1)^n\varepsilon\}A_n^1; (n \geq 1, n \neq 2),$$

$$B_n^2=\{n-(-1)^n\varepsilon\}A_n^2; (n \geq 1, n \neq 2)$$

c. x 軸ピン条件: $y=0; R_e\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=0, M_y=0,$

$$2\mu(u+iv)=0$$

$$C_0=C_1=0, \quad a_3^1=\frac{7q}{192}, \quad b_3^1=\frac{q}{48}, \quad a_1^2=0,$$

$$a_n^1=b_n^1=0; (n \geq 1, n \neq 3)$$

Plane の係数は x 軸固定条件と同一。

d. y 軸ピン条件: $x=0; I_m\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=0, M_x=0,$

$$2\mu(u+iv)=0$$

$$C_0=C_2=a_1^2=0, \quad a_3^1=\frac{q}{192}, \quad b_3^1=\frac{q}{48},$$

$$a_n^1=b_n^1=0; (n=1, 5, 7, \dots)$$

$$a_n^2=b_n^2=0; (n=2, 4, 6, \dots)$$

Plane の係数は y 軸固定条件と同一。

e. x 軸対称条件: $y=0; I_m\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=0,$

$$V_y=\tau_{xy}=v=0$$

$$C_2=D_2=0, \quad a_n^2=b_n^2=A_n^2=B_n^2=0; (n \geq 1)$$

f. y 軸対称条件: $x=0; R_e\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=0,$

$$V_x=\tau_{xy}=u=0$$

$$C_1=D_1=0, \quad a_n^1=b_n^1=0; (n=2, 4, 6, \dots),$$

$$a_n^2=b_n^2=0; (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$B_2^1=A_2^1=-\frac{\nu F_x}{2(1+\nu)(1+\varepsilon)}, \quad A_n^2=B_n^2=0;$$

$$(n=1, 3, 5, \dots)$$

$$A_n^1=B_n^1=0; (n=4, 6, 8, \dots)$$

g. x 軸自由条件: $y=0; M_y=V_y=0, \tau_{xy}=\sigma_y=0$

$$b_n^1=\left\{\frac{3+\nu}{1-\nu}-n\right\}a_n^1-\frac{(1+6\nu)q}{48(1-\nu)}; (n \geq 1), \text{ 第2項目}$$

は $n=3$ の時のみ。

$$b_n^2=\left\{-\frac{3+\nu}{1-\nu}-n\right\}a_n^2; (n \geq 1)$$

$$B_n^1=-(n+1)A_n^1; (n \geq 1), \quad B_n^2=(n-1)A_n^2$$

$$; (n \geq 1)$$

換算せん断力の代りに, せん断力 ($Q_y=0$) を用いると, Plate の係数のうち, b_n^1 と a_n^1 については上記関係式が成立する。また, a_n^2 と b_n^2 については, a_n^2 のみ零となる。

h. y 軸自由条件: $x=0; M_x=V_x=0, \tau_{xy}=\sigma_x=0$

$$b_n^1=\left\{n+(-1)^n\frac{3+\nu}{1-\nu}\right\}a_n^1+\frac{q}{48(1-\nu)}; (n \geq 1),$$

第2項は $n=3$ の時のみ。

$$b_n^2=\left\{n-(-1)^n\frac{3+\nu}{1-\nu}\right\}a_n^2; (n \geq 1)$$

$$B_n^1=\{n-(-1)^n\}A_n^2; (n \geq 1),$$

$$B_n^2=\{n+(-1)^n\}A_n^2; (n \geq 1)$$

$V_x=0$ の代りに $Q_x=0$ を用いると, Plate の係数は次式となる。

$$b_n^1=\left\{n-\frac{3+\nu}{1-\nu}\right\}a_n^1+\frac{q}{48(1-\nu)}; (n=1, 3, 5, \dots),$$

第2項は $n=3$ の時のみ。

$$b_n^2=\left\{n-\frac{3+\nu}{1-\nu}\right\}a_n^2; (n=2, 4, 6, \dots)$$

$$a_n^1=0; (n=2, 4, 6, \dots), \quad a_n^2=0; (n=1, 3, 5, \dots)$$

(ii) Plate と Plane の応力と変位に Coupling の生じる場合

三角錐，四角錐として六角錐を折板の基本形とすると，その組合せにより角錐型連続折板が構成できる。そ

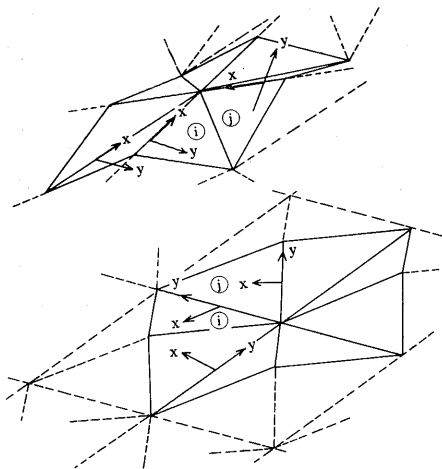


Fig. 1 Typical Folded Plates Having Symmetrical Ridges.

の場合，基本形相互の接合部，あるいは稜線部において 8 種類の応力連続および変位連続の条件が成立するが，この基本形が多く連なる場合には，その接続稜において対称条件が成立する。この接続稜に座標軸を一致させ，対称条件の適合を計ると，その境界条件を厳密に満足させるための未定係数間の関係式が得られる。ここでは x 軸と対称稜が一致する場合，そして y 軸と対称稜が一致する場合について示す。

a. x 軸稜対称の条件：

$$\begin{aligned} \sigma_y t \cos \gamma_0 \pm Q_y \sin \gamma_0 &= 0, \\ \tau_{xy} &= 0, \\ v \sin \gamma_0 \mp w \cos \gamma_0 &= 0, \\ \partial w / \partial y &= 0 \end{aligned}$$

$$C_2 = a_1^2 = b_1^2 = 0, \quad b_1^1 = -2a_1^1$$

$$+ 2M \left\{ (\infty + 1) A_2^2 - \frac{\nu F_y}{2(1+\nu)} \right\}$$

$$b_3^1 = -4a_3^1 - \frac{q}{8} + 4M(\infty + 1) A_1^1,$$

$$b_n^2 = -(n-1) a_n^2; (n \geq 2)$$

$$b_n^1 = -(n+1) a_n^1 + M(\infty + 1)(n+1) A_{n+1}^2; (n \geq 2, n \neq 3)$$

$$B_1^2 = 0, \quad A_1^1 = \frac{C_1}{M(\infty + 1)}, \quad D_2 = \frac{C_0}{M}$$

$$B_n^1 = -(n+1) A_n^1 + N(n+1) a_{n+1}^2; (n \geq 1),$$

$$B_n^2 = -(n-1) A_n^2; (n \geq 2)$$

$$\text{ただし, } M = \pm D \frac{\sin \gamma_0}{t \cos \gamma_0},$$

$$N = \mp 4 \frac{\sin \gamma_0}{t \cos \gamma_0} \text{ とする。}$$

M, N のダブルサフィクスは，稜線における座標軸の方向が Fig. 2 の $A2, B1$ の時を上付き， $A1, B2$ の時を下付きの符号とする。

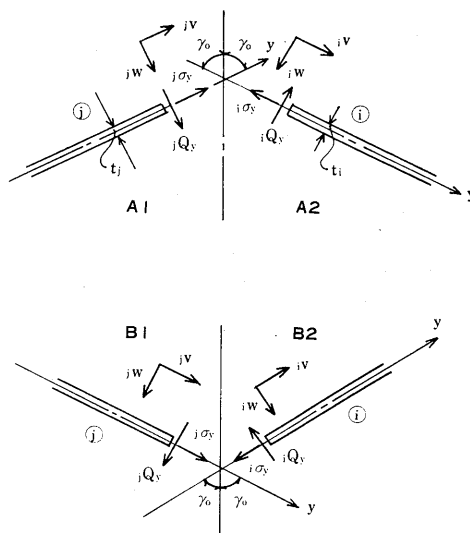


Fig. 2 Stresses and Displacements at the Fold Line.

b. y 軸稜対称の条件：

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \\ t \sigma_x \cos \gamma_0 \pm Q_x \sin \gamma_0 &= 0, \\ \partial w / \partial x &= 0, \\ w \cos \gamma_0 \mp u \sin \gamma_0 &= 0 \end{aligned}$$

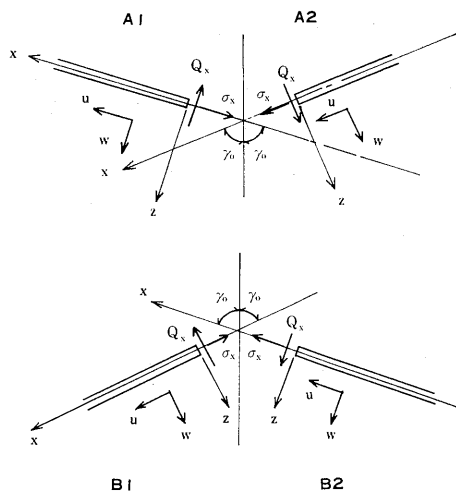


Fig. 3 Stresses and Displacements at the Fold Line.

$$\begin{aligned}
C_0 &= E_1 D_1, \quad C_2 = -E_1 (\alpha + 1) A_1^2, \\
b_1^1 &= 2a_1^1 + 2E_1 \left\{ (\alpha + 1) A_2^1 + \frac{\nu F_x}{2(1+\nu)} \right\} \\
b_n^1 &= (n+1)a_n^1 + E_1 (\alpha + 1) (n+1) A_{n+1}^1; \\
&\quad (n=3, 5, 7, \dots) \\
b_n^1 &= (n-1)a_n^1; \quad (n=2, 4, 6, \dots), \\
b_n^2 &= (n-1)a_n^2; \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\
b_n^2 &= (n+1)a_n^2 + E_1 (\alpha + 1) (n+1) A_{n+1}^2; \\
&\quad (n=2, 4, 6, \dots) \\
B_n^1 &= (n+1)A_n^1 - F_1 (n+1)a_{n+1}^1; \\
&\quad (n=1, 3, 5, \dots) \\
B_n^1 &= (n-1)A_n^1; \quad (n=2, 4, 6, \dots), \\
B_n^2 &= (n-1)A_n^2; \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\
B_n^2 &= (n+1)A_n^2 - F_1 (n+1)a_{n+1}^2; \\
&\quad (n=2, 4, 6, \dots)
\end{aligned}$$

ただし, $E_1 = \frac{DT \sin \gamma_0}{2\mu \cos \gamma_0}$, $F_1 = \frac{4T \sin \gamma_0}{t \cos \gamma_0}$

γ_0 は凸稜線で対称を正とし, 凹稜線で対称の時を負とする。また, T に関しては, 座標軸と単板の関係が Fig. 3 の A1, B1 の時を +1, A2, B2 の時を -1 とする。

(iii) 折板の境界に弾性支持ばりが存在する場合

Fig. 4 は, はりで弾性支持された折板の部分図である。はりの断面積 (A) とヤング率 (E_y) は材軸方向に一

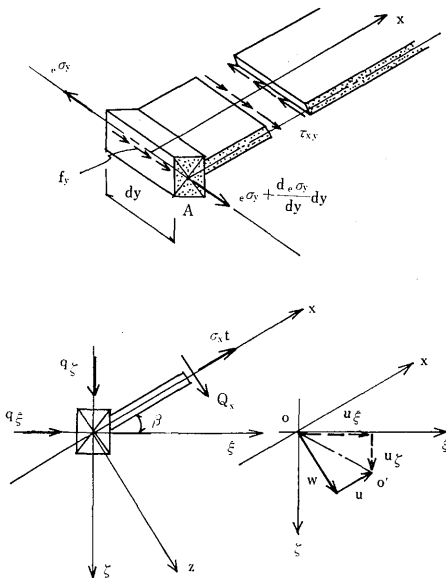


Fig. 4 Folded Plates Supported by the Girder.

定とし, はりは座標軸 y, ξ, ζ 方向に変形する。この弾性支持の条件を厳密に満足させるための未定係数間の関係式は, 折板端部とはりの応力連続と変位連続の適合を計ることによって得られる。

a. はりが y, ξ, ζ の3方向に変形する場合

はりの3方向の変形に対する支配方程式は,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v}{dy^2} &= -\frac{f_y}{E_y} \\
(EI)_\tau \frac{d^4 u_\xi}{dy^4} &= q_\xi \\
(EI)_\xi \frac{d^4 u_\zeta}{dy^4} &= q_\zeta
\end{aligned}$$

となり, $(EI)_\tau$ は τ 軸回りの曲げ剛性であり, $(EI)_\xi$ は ξ 軸回りの曲げ剛性である。また f_y, q_ξ, q_ζ は各座標軸方向の荷重成分を表わし, 折板の端部における応力成分によって次のごとく示される。

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{t}{A} \tau_{xy}, \quad q_\xi = t \sigma_x \cos \beta + Q_x \sin \beta, \\
q_\zeta &= Q_x \cos \beta - t \sigma_x \sin \beta
\end{aligned}$$

上式において, Q_x の代りに換算せん断力 V_x を用いるのが妥当と考えるが, ここではせん断力を用いた場合について示す。変位の適合は Fig. 4 から次式となる。

$$u_\tau = u \cos \beta + w \sin \beta, \quad u_\xi = w \cos \beta - u \sin \beta$$

y 方向の変形に対しては, 折板端部の変位とはりの変位を, 同一の y 方向変位 v に揃えてあるので, 変位の適合は満足している。これらの変位成分と荷重成分をはりの支配方程式に代入すると, 未定係数間の関係式を得るための恒等式が求まる。演算過程は省略し, その結果のみを次に示す。

$$\begin{aligned}
b_n^1 &= (n-1)a_n^1; \quad (n=0, 2, 4, 6, \dots), \\
b_n^2 &= (n-1)a_n^2; \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\
b_n^1 &= (n+1)a_n^1 - \frac{4D}{K_3 n} a_{n-1}^1 - \frac{DK_4 \sin 2\beta}{4\mu} (n+1) \\
&\quad \times \{ (\alpha + n+1) A_{n+1}^1 - B_{n+1}^1 \}; \quad (n=3, 5, 7, \dots) \\
b_n^2 &= (n+1)a_n^2 - \frac{4D}{K_3 n} a_{n-1}^2 - \frac{DK_4 \sin 2\beta}{4\mu} (n+1) \\
&\quad \times \{ (\alpha + n+1) A_{n+1}^2 - B_{n+1}^2 \}; \quad (n=4, 6, 8, \dots) \\
B_3^1 &= (3-\alpha) A_3^1 - \frac{1}{3} A_3^1 + \frac{1}{3} B_2^1 \\
B_4^1 &= (\alpha+4) A_4^1 - \frac{\mu t K_1}{12} (2A_1^1 - B_1^1) \\
&\quad + \frac{\mu K_2 \sin 2\beta}{3} a_2^1 \\
B_n^1 &= (n-\alpha) A_n^1 + \frac{2t\mu(\alpha+1)}{E_y A n} A_{n-1}^1 - \\
&\quad \frac{4t^2 \mu^2 K_1}{E_y A n(n-1)(n-2)} A_{n-4}^1 \\
&\quad + \frac{4t^2 \mu^2 K_1}{E_y A n(n-1)(n-2)(n-3)} B_{n-4}^1; \\
&\quad (n=5, 7, 9, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^1 &= (\alpha + n) A_n^1 - \frac{4\mu^2 K_1 t^2}{E_y A n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&\quad \times \{(n-5) A_{n-4}^1 - B_{n-4}^1\} - \frac{2\mu t K_1 (\alpha + 1)}{n(n-1)(n-2)} A_{n-3}^1 \\
&\quad + \frac{4\mu K_2 \sin 2\beta}{n(n-1)} a_{n-2}^1; (n=6, 8, 10, \dots) \\
B_n^2 &= (2-\alpha) A_n^2 + \frac{t\mu}{E_y A} B_1^2 - \frac{1}{2(1+\nu)} F_y \\
B_n^3 &= (4-\alpha) A_n^3 - \frac{t\mu}{2E_y A} (2A_n^3 - B_n^3) \\
B_n^4 &= (n-\alpha) A_n^4 + \frac{2t\mu(\alpha+1)}{E_y A n} A_{n-1}^4 \\
&\quad - \frac{2t^2\mu^2 K_1}{E_y A n(n-1)(n-2)} A_{n-4}^4 \\
&\quad + \frac{4t^2\mu^2 K_1}{E_y A n(n-1)(n-2)(n-3)} B_{n-4}^4; \\
&\quad (n=6, 8, 10, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^2 &= (\alpha + n) A_n^2 - \frac{4t^2\mu^2 K_1}{E_y A n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&\quad \times \{(n-5) A_{n-4}^2 - B_{n-4}^2\} - \frac{2\mu t K_1 (\alpha + 1)}{n(n-1)(n-2)} A_{n-3}^2 \\
&\quad + \frac{4\mu K_2 \sin 2\beta}{n(n-1)} a_{n-2}^2 - \frac{\mu t K_1}{60(1+\nu)} F_y; (n=5, 7, 9, \dots) \\
&\quad \nwarrow (n=5 \text{ の時のみ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで, } K_1 &= \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{(EI)_\zeta} + \frac{\sin^2 \beta}{(EI)_\xi} \right\} \\
K_2 &= \left\{ \frac{1}{(EI)_\zeta} - \frac{1}{(EI)_\xi} \right\} \\
K_3 &= \frac{1}{(EI)_\zeta \sin^2 \beta + (EI)_\xi \cos^2 \beta} \\
K_4 &= \frac{(EI)_\zeta - (EI)_\xi}{(EI)_\zeta \sin^2 \beta + (EI)_\xi \cos^2 \beta}
\end{aligned}$$

b. はりが \$\xi, \zeta\$ の2方向に変形する場合

はりが \$\xi\$ 軸方向と \$\zeta\$ 方向にのみ変形する場合には、前記 a. における材軸方向 (\$y\$ 方向) の剛性を無限大とする。実用的には、材軸方向の変形は、はりの曲げ変形と比較して著しく小さいので、この条件で十分である。

$$\begin{aligned}
b_n^1 &= (n+1) a_n^1 + \frac{DL_2 t (\alpha + 1) \sin 2\beta}{2n(n-1)} A_{n-2}^1 \\
&\quad - \frac{4DL_3}{n} a_{n-1}^1; (n=3, 5, 7, \dots)
\end{aligned}$$

$$b_n^1 = (n-1) a_n^1; (n=0, 2, 4, 6, \dots),$$

$$b_n^2 = (n-1) a_n^2; (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$\begin{aligned}
b_n^2 &= (n+1) a_n^2 + \frac{DL_2 t (\alpha + 1) \sin 2\beta}{2n(n-1)} A_{n-2}^2 \\
&\quad - \frac{4DL_3}{n} a_{n-1}^2 + \frac{DL_2 t \sin 2\beta}{48(1+\nu)} F_y; \\
&\quad \nwarrow (n=4 \text{ の時のみ}) \\
(n=4, 6, 8, \dots)
\end{aligned}$$

$$B_n^1 = (n-\alpha) A_n^1; (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$\begin{aligned}
B_n^2 &= (n-\alpha) A_n^2 - \frac{1}{2(1+\nu)} F_y; (n=2, 4, 6, \dots) \\
&\quad \nwarrow (n=2 \text{ の時のみ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^1 &= (n+\alpha) A_n^1 - \frac{2\mu t L_1 (\alpha + 1)}{n(n-1)(n-2)} A_{n-3}^1 \\
&\quad + \frac{4\mu \sin 2\beta L_2}{n(n-1)} a_{n-2}^1; (n=4, 6, 8, \dots)
\end{aligned}$$

$$B_n^2 = (\alpha + n) A_n^2 - \frac{2\mu t L_1 (\alpha + 1)}{n(n-1)(n-2)} A_{n-3}^2$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{4\mu \sin 2\beta L_2}{n(n-1)} a_{n-2}^2 - \frac{\mu L_1 t}{60(1+\nu)} F_y; \\
&(n=5, 7, 9, \dots) \quad \nwarrow (n=5 \text{ の時のみ})
\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } L_1 = \frac{\cos^2 \beta}{(EI)_\zeta} + \frac{\sin^2 \beta}{(EI)_\xi}$$

$$L_2 = \frac{1}{(EI)_\zeta} - \frac{1}{(EI)_\xi}$$

$$L_3 = \frac{\sin^2 \beta}{(EI)_\zeta} + \frac{\cos^2 \beta}{(EI)_\xi}$$

c. はりの部材軸と \$x\$ 軸が一致する場合

\$\xi\$ 方向と \$\zeta\$ 方向に変形するはりの部材軸と単板の座標軸が一致する場合には、未定係数間には次の関係式が成立する。

$$b_n^1 = -(n+1) a_n^1 + \frac{4D}{\tan^2 \beta + 1}$$

$$\times \left\{ \frac{\tan^2 \beta}{(EI)_\zeta} + \frac{1}{(EI)_\xi} \right\} \frac{1}{n} a_{n-1}^1$$

$$- \frac{3D}{4(\tan^2 \beta + 1)n(n-1)} q - \frac{D \tan \beta}{\tan^2 \beta + 1}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(EI)_\xi} - \frac{1}{(EI)_\zeta} \right\} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\times \left\{ (\alpha + 1) A_{n-2}^1 - \frac{1}{2(1+\nu)} F_x \right\}; (n=3, 4, 5, \dots)$$

\$\uparrow (n=4 \text{ の時のみ})\$

$$b_n^2 = (1-n) a_n^2; (n=1, 2, 3, \dots), C_2 = D_1 = 0$$

$$B_n^1 = (\alpha - n) A_n^1 - \frac{1}{2(1+\nu)} F_x; (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$B_n^2 = -(\alpha + n) A_n^2 + \frac{2\mu t}{\tan^2 \beta + 1} \left\{ \frac{1}{(EI)_\zeta} + \frac{\tan^2 \beta}{(EI)_\xi} \right\}$$

$$\times \left\{ (\alpha + 1) A_{n-3}^2 - \frac{1}{2(1+\nu)} F_x \right\}$$

\$\uparrow (n=5 \text{ の時のみ})\$

$$\begin{aligned}
&- \frac{8\mu \tan \beta}{\tan^2 \beta + 1} \left\{ \frac{1}{(EI)_\xi} - \frac{1}{(EI)_\zeta} \right\} \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}^2; \\
&(n=4, 5, 6, \dots)
\end{aligned}$$

(iv) 混合境界または点支持された境界の扱い方

支持辺の境界と連続稜などの境界が混合している場合、その境界条件を Point Matching して最小二乗法を適用すると、境界幅の小さい部分の境界条件や点支持の境界条件を十分に満足した結果が得られないことがある。これは境界条件の一致に関する一種の平滑化であり、最小二乗法の特長である。Point Matching される境界条件が、折板の一つの境界で同一の時は、この境界条件の平滑化は解の精度に良い結果をもたらすが、支持条件や境界幅の小さい部分の条件が、他の境界条件と共に平滑化が行なわれると、境界条件の相対的な変化が弱まることになる。そこで、最小二乗法の異精度測定に用いられる精度指数を応用して、混合境界条件の適合を計る方法を示す。以下、平板の曲げ問題における境界条件の扱い方を示していくが、これは式の簡略化のために行うものであって、折板の場合には Plane の項が入ってくるだけで、方法論については全く同様である。

級数展開した平板のたわみ関数を便宜上次式で表示す

る。

$$w(z) = w_0(z) + W_1(z) + \varepsilon(z)$$

$w_0(z)$ は特殊解を意味し、 $W_1(z)$ は展開式の初項から N 項までの試関数であり、 $\varepsilon(z)$ は残余項から成る誤差関数である。平板の境界条件式は上式の微分によって得られるので、この条件式を一般に次のように δ を用いて表示する。

$$\delta w(z) = \delta w_0(z) + \delta W_1(z) + \delta \varepsilon(z)$$

$$\delta W_1(z) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(z)$$

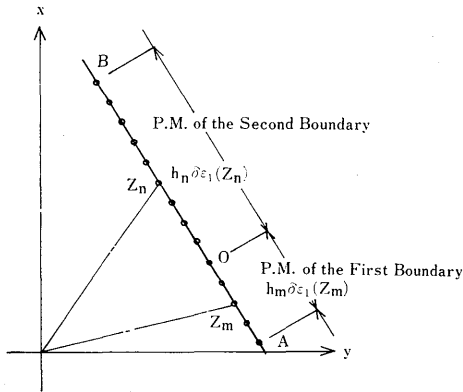


Fig. 5 Point Matchings of the Mixed Boundary Condition.

Fig. 5 の混合境界A-B上で I 点の Point Matching を行くと、一点に2種の境界条件が存在するので、合計 $2I$ 個の誤差関数の集団が生じ、この誤差関数の2乗和が最小になる条件から、未定係数の値が決定される。境界条件の精度指数を h とすると、誤差関数の二乗和は次式となる。

$$S = h_1^2 \delta \varepsilon_1^2(z_1) + h_2^2 \delta \varepsilon_1^2(z_2) + \cdots + h_I^2 \delta \varepsilon_1^2(z_I) + h_{I+1}^2 \delta \varepsilon_2^2(z_1) + h_{I+2}^2 \delta \varepsilon_2^2(z_2) + \cdots + h_{2I}^2 \delta \varepsilon_2^2(z_I)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda^2 \delta_1 f_1(z_1) & \lambda^2 \delta_1 f_2(z_1) & \lambda^2 \delta_1 f_8(z_1) \cdots \lambda^2 \delta_1 f_N(z_1) \\ \lambda^2 \delta_1 f_1(z_2) & \lambda^2 \delta_1 f_2(z_2) & \lambda^2 \delta_1 f_8(z_2) \cdots \lambda^2 \delta_1 f_N(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^2 \delta_1 f_1(z_M) & \lambda^2 \delta_1 f_2(z_M) & \lambda^2 \delta_1 f_8(z_M) \cdots \lambda^2 \delta_1 f_N(z_M) \\ \delta_1 f_1(z_{M+1}) & \delta_1 f_2(z_{M+1}) & \delta_1 f_8(z_{M+1}) \cdots \delta_1 f_N(z_{M+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 f_1(z_{M+2}) & \delta_1 f_2(z_{M+2}) & \delta_1 f_8(z_{M+2}) \cdots \delta_1 f_N(z_{M+2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 f_1(z_I) & \delta_1 f_2(z_I) & \delta_1 f_8(z_I) \cdots \delta_1 f_N(z_I) \\ \lambda^2 \delta_2 f_1(z_1) & \lambda^2 \delta_2 f_2(z_1) & \lambda^2 \delta_2 f_8(z_1) \cdots \lambda^2 \delta_2 f_N(z_1) \\ \lambda^2 \delta_2 f_1(z_2) & \lambda^2 \delta_2 f_2(z_2) & \lambda^2 \delta_2 f_8(z_2) \cdots \lambda^2 \delta_2 f_N(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^2 \delta_2 f_1(z_M) & \lambda^2 \delta_2 f_2(z_M) & \lambda^2 \delta_2 f_8(z_M) \cdots \lambda^2 \delta_2 f_N(z_M) \\ \delta_2 f_1(z_{M+1}) & \delta_2 f_2(z_{M+1}) & \delta_2 f_8(z_{M+1}) \cdots \delta_2 f_N(z_{M+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_2 f_1(z_{M+2}) & \delta_2 f_2(z_{M+2}) & \delta_2 f_8(z_{M+2}) \cdots \delta_2 f_N(z_{M+2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_2 f_1(z_I) & \delta_2 f_2(z_I) & \delta_2 f_8(z_I) \cdots \delta_2 f_N(z_I) \end{bmatrix}$$

(6)

精度指数 h の値は、一様な境界上ではすべて等しくなるが、Fig. 5 の第1境界と第2境界では異なった値とする。そこで、第2境界の精度指数を h_n 、第1境界で h_m とし、 $\lambda = h_m/h_n$ と置く。この λ を用いて各境界別に整理すると、誤差関数の二乗和は次式となる。

$$S = \lambda^2 \{ \delta \varepsilon_1^2(z_1) + \delta \varepsilon_1^2(z_2) + \cdots + \delta \varepsilon_1^2(z_M) + \delta \varepsilon_2^2(z_1) + \delta \varepsilon_2^2(z_2) + \cdots + \delta \varepsilon_2^2(z_M) \} + \{ \delta \varepsilon_1^2(z_{M+1}) + \delta \varepsilon_1^2(z_{M+2}) + \cdots + \delta \varepsilon_1^2(z_I) + \delta \varepsilon_2^2(z_{M+1}) + \delta \varepsilon_2^2(z_{M+2}) + \cdots + \delta \varepsilon_2^2(z_I) \}$$

サフィックス M は第1境界の選点数である。上式の二乗和の最小条件から次式を得る。

$$\sum_{i=1}^M \lambda^2 \{ \delta_1 f_n(z_i) \delta \varepsilon_1(z_i) + \delta_2 f_n(z_i) \delta \varepsilon_2(z_i) \} + \sum_{i=M+1}^I \{ \delta_1 f_n(z_i) \delta \varepsilon_1(z_i) + \delta_2 f_n(z_i) \delta \varepsilon_2(z_i) \} = 0$$

$$\delta \varepsilon_1(z_i) = \delta w_1(z_i) - \delta_0 w_1(z_i) - \sum_{n=1}^N a_n \delta_1 f_n(z_i)$$

$$\delta \varepsilon_2(z_i) = \delta w_2(z_i) - \delta_0 w_2(z_i) - \sum_{n=1}^N a_n \delta_2 f_n(z_i)$$

上式をマトリックス表示すると次式となる。

$$[F]^T [F] \{A\} = [F]^T [W]$$

ここで、

$$\{A\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \cdots a_N\}^T$$

$$[W] = [\lambda^2 \{ \delta w_1(z_1) - \delta_0 w_1(z_1) \} \ \lambda^2 \{ \delta w_1(z_2) - \delta_0 w_1(z_2) \} \cdots \lambda^2 \{ \delta w_1(z_M) - \delta_0 w_1(z_M) \} \ \{ \delta w_1(z_{M+1}) - \delta_0 w_1(z_{M+1}) \} \ \{ \delta w_1(z_{M+2}) - \delta_0 w_1(z_{M+2}) \} \cdots \{ \delta w_1(z_I) - \delta_0 w_1(z_I) \} \ \lambda^2 \{ \delta w_2(z_1) - \delta_0 w_2(z_1) \} \ \lambda^2 \{ \delta w_2(z_2) - \delta_0 w_2(z_2) \} \cdots \lambda^2 \{ \delta w_2(z_M) - \delta_0 w_2(z_M) \} \ \{ \delta w_2(z_{M+1}) - \delta_0 w_2(z_{M+1}) \} \cdots \{ \delta w_2(z_I) - \delta_0 w_2(z_I) \}]^T$$

前式によってすべての未定係数は決定されるが、 λ の値によって、Fig. 5 の境界AOの条件を境界BOに比較

して強く満足させることができる。例えば、 $\lambda=2$ の場合には境界 AO 上の、各選点位置における境界条件を4式づつ重複して与えることに等しい。したがって AO 上の Point Matching の数が M 個の時、 $2\lambda^2 \times M$ 個の条件式が成立することになり、混合境界 AB では総計 $2(I+M^2-M)$ 個の条件式を与えることと等価になる。

これが折板構造の場合には、折板の連続稜において、1点につき8種の境界条件が成立するので、総計 $8(I+M^2-M)$ 個の条件式となる。

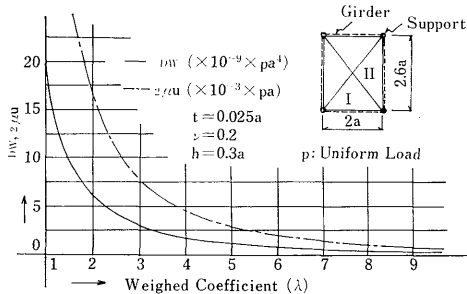


Fig. 6 Convergence of Displacements on Support.

Fig. 6 は、 λ の値に対する、点支持された不等辺四角錐折板の支持条件の収束性を示している。この解析例によると、 λ が1から5の範囲で面外変位、面内変位は共に急速に収束し、それ以上では一様状態となっている。したがって、 λ の値には必ずしも大きい値を用いる必要はなく、領域内の応力や変位の精度も $\lambda=5$ 程度で比較的良好である。

3. 応用例

前節で示した各種の境界条件は、折板構造の設計で考慮しなければならないものばかりであるが、本節ではそのうち、対称稜を有する角錐型連続折板と弾性支持ばりを有する折板への応用例を示す。

a. 対称稜を有する角錐型連続折板

Fig. 7 は連続稜を有し、頂点が逆配置した四角錐折

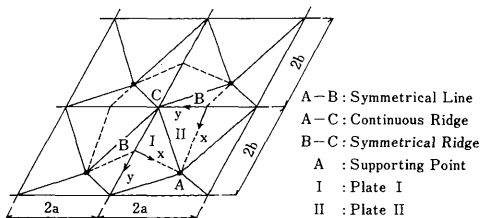


Fig. 7 Outline of Continuous Folded Triangular Plates.

板を基本型としている。この基本型が y 軸を接続稜として連続し、各頂点において支持されている。この接続稜では対称条件が成立するので、前節の y 軸稜対称の条件と、 x 軸対称条件で示した未定係数間の関係式を利用する。これら2種の境界条件の扱いで示した関係式を組み合わせると、次に示す未定係数間の関係式が新たに得られる。

$$a_n^2 = b_n^2 = A_n^2 = B_n^2 = C_2 = D_2 = 0$$

$$b_1^1 = 2a_1^1 + 2E_1 \left\{ (\alpha + 1) A_2^1 + \frac{\nu}{2(1+\nu)} F_y \right\}$$

$$b_n^1 = (n+1)a_n^1 + E_1 (\alpha + 1) (n+1) A_{n+1}^1 ;$$

$$(n=3, 5, 7, \dots)$$

$$b_n^1 = (n-1)a_n^1 ; (n=2, 4, 6, \dots)$$

$$C_0 = ED_1$$

$$B_n^1 = (n+1) A_n^1 - F_1 (n+1) a_{n+1}^1 ; (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$B_n^1 = (n-1) A_n^1 ; (n=2, 4, 6, \dots)$$

$$E_1 = \frac{DT \sin \gamma_0}{2\mu \cos \gamma_0}, F_1 = \frac{4T \sin \gamma_0}{t \cos \gamma_0}, \gamma_0 \geq 0, T=1$$

上記関係式をPlate I と Plate II について独立に成立させると、この2枚の単板を解析すればよいことになる。また頂点の支持条件は Rigid Connection とし、単板相互の接続稜では連続条件が成立し、この境界で成立する8種類の連続条件を Point Matching することになる。

Fig. 8 は、折板の底辺比を1:1とし、頂点の高さ(ライズ、 h)を種々変化させた時の、 x 軸上の曲げモーメントと垂直応力度(軸力)の分布図である。また、Fig. 9 はライズを一定にして、底辺比を種々変化させた時の、 x 軸上におけるたわみと軸力を示している。曲げモーメントは x 軸上の値のみであるが、折板全域の値と比較しても、最大曲げモーメントは、ライズの最も低い折板 ($h=0.05a$) を除いて、対称稜中央部に生じる。また、ライズが $0.2a$ 以上の折板においては、ライズの変化に対して曲げモーメントの値は一様な分布を示すようになる。これは、ライズの増大に伴い稜線部の交角が大きくなり、面外力に対して稜線のはり作用が強くなることを示している。したがって、曲げモーメントに限らず、ねじりモーメント、面外せん断力も同様の性状を示すようになる。一方、面内応力に関しては、一般に折板の形状や境界条件に強く影響を受けるものであり、図の垂直応力度の性状もこのことを示している。なお、ここに示した応用例において、点支持の条件に対しては $\lambda=5$ とし、連続条件の Point Matching は16点、そして級数展開式の項数は、I 板、II 板共に22項とした。

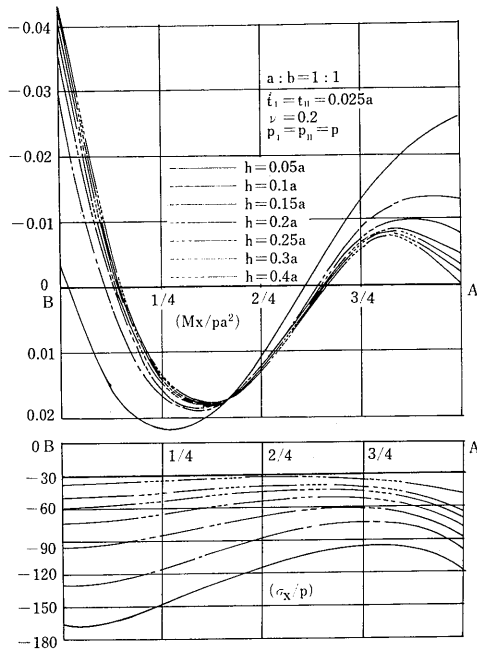


Fig. 8 Stress Distributions of Folded Plates of Fig. 7.

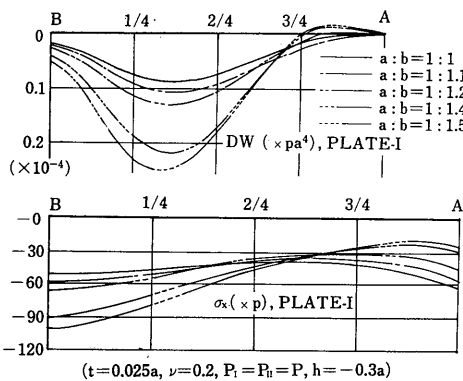


Fig. 9 Stresses and Displacements of Folded Plates of Fig. 7.

b. はりを有する連続折板

Fig. 10 は、折板の基本型である四角錐の周辺にはりを有する連続折板の水平射影である。すなわち、図の破線部分にはりがあり、直交するはりの交点において柱で支持されている。境界条件は、 x 軸で対称条件、I 板と II 板の稜線で連続条件、そして y 軸が自由度 2 のはり支持、さらにはりの交点が Rigid Connection である。前節で示した、 x 軸対称条件と y 軸上に自由度 2 のはりが存在する時の条件を厳密に満足させるための、未定係数間の関係式を結合すると次式のごとくなる。

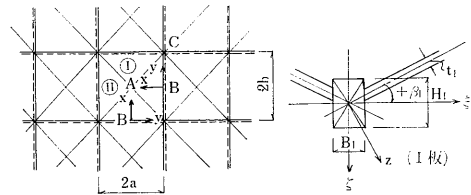


Fig. 10 Continuous Folded Triangular Plates Supported by the Girder.

$$I a_n^2 = I b_n^2 = I A_n^2 = I B_n^2 = C_2 = D_2 = 0$$

$$I b_n^1 = \{n-1\} I a_n^1; (n=0, 2, 4, 6, \dots)$$

$$I b_n^1 = \{n - (-1)^n\} I a_n^1 + \frac{I E_m}{n} I a_1^{n-1} + \frac{I F_m}{n(n-1)} I A_{n-2}^1; (n=3, 5, 7, \dots)$$

$$I B_n^1 = \{n - \alpha\} I A_n^1; (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$I B_n^1 = \{n + (-1)^n \alpha\} I A_n^1 + \frac{I G_m}{n(n-1)(n-2)} I A_{n-3}^1 + \frac{I H_m}{n(n-1)} I a_{n-2}^1; (n=4, 6, 8, \dots)$$

上記関係式は I 板についてのものだが、II 板についても同様の関係式が成立する。ただし級数展開式の項数は、I 板と II 板で必ずしも同一でなくてよい。ここで、

$$E_m = -\frac{2}{a} k_1 (k_2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

$$F_m = \frac{t(\alpha+1) \sin \beta \cos \beta}{2a} k_1 (k_2 - 1)$$

$$G_m = -\frac{\mu t(\alpha+1)}{Da} k_1 (k_2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta)$$

$$H_m = \frac{4\mu \sin \beta \cos \beta}{Da} k_1 (k_2 - 1)$$

$$k_1 = \frac{2aD}{(EI)_\xi} = \frac{2\alpha_I^3}{\alpha_B \alpha_H^2 (1-\nu^2)}$$

$$k_2 = \frac{(EI)_\xi}{(EI)_\zeta} = \frac{\alpha_H^2}{\alpha_B^2}$$

$$t = \alpha_I a, B = \alpha_B a, H = \alpha_H a$$

Fig. 11 は周辺にはりを有する四角錐折板が、単独に 4 隅点で支持されている場合の、軸力と曲げモーメントの表示である。そして ζ 方向のはりの曲げ剛性を種々変化させた時の比較図である。 σ_x の最大値は、支持点に近い部分に生じ、はりの曲げ剛性が低下するにしたがい、その値は徐々に増大する。これは、はりに対して、折板の支持反力の分担量が增大することを意味する。また x 軸上の軸力伝達については、B 点の値が非常に小さいことから、はり方向には流れず支点方向に伝達されている。これは、はりに直角方向の面内変位拘束を、はりに

期待できないことを意味しており、周辺ばりは主として面外力に対する補強効果に利用すべきである。なお **Fig. 11** の実線は、 ζ 方向と η 方向の曲げ剛性を無限大にしたものであって、折板の周辺を固定した場合と等価である。

また **Fig. 10** と同一形状の連続折板については、I

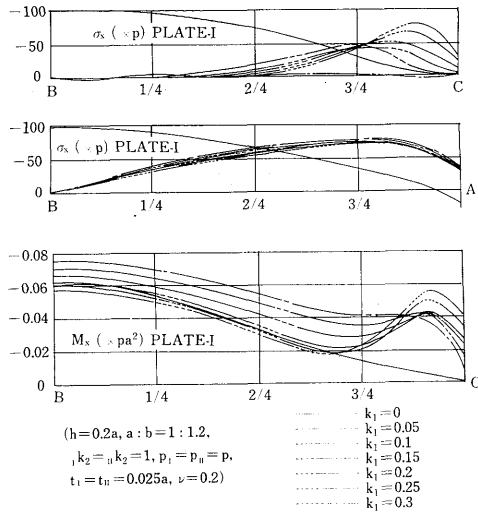


Fig. 11 Normal Stresses and Bending Moments of Folded Plates Supported by the Girder.

板、II 板の η 方向の曲げ剛性のみ無限大にすればよいし、折板の基本形が一方方向にのみ連続する場合は、その方向の η 方向の曲げ剛性 $(EI)_\eta$ のみ無限大とすればよい。なお、それらの解析結果は省略する。

4. むすび

本論文は、実用上必要とされるほとんどの境界条件について、その境界条件を厳密に満足させるための方法と、未定係数間の関係式を示した。また、その中から、実用上多用される角錐型折板構造の応用例を示し、その力学的性状について、若干の考察を試みたが、本論文で示した多くの境界条件を組合せることにより、さらに多様な形式を有する折板の解析が可能になる。

参 考 文 献

1. 谷, 片岡: 最小二乗法による境界値問題の Point Matching 法への応用 (その1), (その2), (その3), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭48, 49, 52
2. 谷, 片岡: Least Square-Point Matching 法による連続角錐型折板の弾性学的研究, 日本建築学会論文報告集, 昭53, 第266号
3. 谷, 木原, 片岡: 折板の弾性論的研究 (その2), 日本建築学会論文報告集号外, 昭42
4. 谷, 片岡他共著: 建築物の構造解析シリーズ; 板構造の解析, 技報堂出版, 昭51