

後流渦に関する二、三の考察と検証

飯 坂 武 彦*, 水 谷 正 和**

Interaction of Wake Vortices

Takehiko I-IZAKA* and Masakazu MIZUTANI**

(Received September 12, 1978)

Vortex filaments replaced with the Rankine's compound vortices in their spatial and temporal development, are used to discuss their interactions with each other, with a plane solid boundary and with a free water surface. Some of the results are proved by water tank experiments using test vortices with wing-tips of finite span.

1. 緒言と摘要

近年流体力学における渦の場の研究が¹⁾, 本報告も渦糸のうける基本的な力について二、三の考察を試みたものであって, そのおもな内容は, 渦糸の拡散現象, 渦糸の相互作用, および壁あるいは水表面が渦糸に与える影響についてである。近似式を立てて数値例を与え, 一部については実験をもって検証した。実験は水槽の中で行ない, 実験渦糸としては翼端渦を有限翼で発生させて利用した。

渦糸そのものについては, 詳しくは core に発生する噴流を考え, あるいは渦の breakdown など考察しなければならないであろうが, ここでは粘性による拡散だけを中心に調べた。渦糸は filament として, または近似的に Rankine の結合渦動として取扱うこととし, core 半径の増大をもって, 粘性による拡散の評価とした。こうした一様渦度の筒を流体から切り離して, 一つの flexible slender body と見なす力学を考えるのであるが, これは E. Widnall と B. Bliss²⁾ によって, 安定性解析等に対して有効性を証明された方法である。我々もここではこのモデルに従うことにする。渦糸の相互作用については, 並べておいた二枚の翼の端々から流れ下る一対の渦糸の動きを, 数値例および実験例で示

す。それぞれ反対まわりの渦巻を, 上流と下流に並べて一致せしめる干渉については, A. Schaffer³⁾ によって, 両渦の消滅が示されており, 我々の一対渦糸はこれに近い試みである。壁面あるいは水表面が渦糸に与える影響については, 渦糸の場の複素ポテンシャルを求めて渦糸の動きや水表面の降下等を解析し, 壁面の影響については検証実験をも行った。なお, core 噴流についても若干の実験考察が行われている。

2. 記号

本報告に用いた主な記号を下に示す。

U :	主流速度	[cm/sec]
K :	渦糸の強さ	[cm ² /sec]
θ :	翼の迎え角	[°]
ν :	動粘性係数	[cm ² /sec]
t :	時間	[sec]
ω :	回転角速度	[rad/sec]
P_x, P_y :	渦糸単位長に働く分力	[g]
$W(z)$:	複素ポテンシャル	
ϕ :	速度ポテンシャル	
Ψ :	流れ関数	
ρ :	密度	[g·sec ² /cm ⁴]
p :	圧力	
$\mathbf{v}$:	速度ベクトル	
$\mathbf{w}$:	渦度 (rot $\mathbf{v}$)	
$\mathbf{r}$:	位置ベクトル	
R_e :	レイノルズ数 (代表長さ: 翼弦長)	

*工学研究科機械工学専攻: 現在, 平田プレス工業株式会社
(Department of Mechanical Engineering: Now, Hirata Press Kogyo Co., Ltd.)

**機械・生産機械工学科

(Department of Mechanical Engineering)

上記以外の記号については、本文中のその箇所において説明を加える。

3. 渦糸の単純な表現

粘性による渦度の拡散現象は、非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v}=0$) の仮定の下に Navier-Stokes 方程式から誘導された

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{w} = \left(\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{w} \quad (1)$$

によって、時間空間的に規定せられる。それゆえ静止流体中に $x=-\infty$ から $x=+\infty$ に延びる一本の均質な渦糸が時間とともに拡散する有様はよく知られていて、それは渦糸に直角な面上の x 軸周りの回転運動であるから、円柱座標 (r, θ, x) を用いれば $\mathbf{w}=(0, 0, \omega)$ であって、ここに ω は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (2)$$

に支配せられて、すなわち時間空間分布が

$$\omega = \frac{K}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (3)$$

と表わされる。ここに K は渦糸の強さを示している。これからまた、渦糸による流速 $\mathbf{v}=(0, v, 0)$ において、

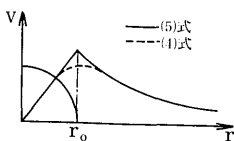
$$v = \frac{K}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right\} \quad (4)$$

となり、この時間空間分布の性質はよく知られているところである。

次に (3), (4) 式の渦流れを、Rankine の結合渦動で近似しよう。すなわち、 t 時刻での渦度を半径 $r_0=2\sqrt{\nu t}$ の円内 (core) に分布せしめて、強さ $K_0=K/\pi r_0^2$ の一様渦度分布とし、その外部はポテンシャル渦流を以て近似するのであって、いわゆる Rankine 渦と見なすのである。この近似による速度分布は core の回転角速度 $\omega=K/2\pi r_0^2$ より

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{K}{2\pi r_0^2} \cdot r & (0 \leq r \leq r_0) \\ v &= \frac{K}{2\pi r_0^2} \cdot \frac{r_0^2}{r} = \frac{K}{2\pi r} & (r_0 \leq r \leq \infty) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。(4), (5) 式の任意の時間 t における半径方向の速度分布を第1図に示す。これによって $r \ll r_0$ と $r \gg r_0$ において両者が一致しているのがわかる。この近似の場



第1図 任意時刻の速度分布

は、半径 r_0 の円柱に循環 K を与えたものに等しく、粘性の影響により渦糸が拡散していく任意の時点における渦糸の場を、循環 K をもった円柱の回の場合と見なしうることを示している。以後これを渦筒

と呼ぶことにしよう。

以上では一様な無限長渦糸の時間的経過について述べたのであるが、ここで改めて一点 $x=0$ において x 軸周りの循環 K がたえず発生し、それが主流 U に乗って x の正方向に流れる場合を考えよう。 $\mathbf{v}_1$ を渦筒による速度場とすれば、流れの場が定常に達したときには、この場を支配する方程式 (1) は、

$$\left\{ (U_i + \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} \mathbf{w} = \left(\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_1 + \nu \Delta \mathbf{w}$$

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}$$

となるから、ここで U に比べて $|\mathbf{v}_1|$ が一位の小量であることを取り入れて簡単化すれば、いわゆる Oseen の近似：

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \Delta \omega \quad \omega = \omega(r, x)$$

が見い出される。そして $x/U \equiv t$ と記号すれば、これは (2) 式そのものであることから、上に述べてきた時間的变化に $t=x/U$ の書き換えをすれば、ただちに現在の定常問題の x 点での ω 、すなわち $\omega(r, x)$ を与えるものであることがわかる。

渦筒の半径 r が

$$r = 2\sqrt{\nu t} = 2\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (6)$$

で示されるのは上述のごとくであるが、ここで発生源において既に $t=t_0$ に相当する渦筒半径を持っている時には、初期時刻を t_0 から数えればよいものとする。すると、 $x_0=Ut_0$ を発生源の位置と見ればよい。 t_0 時刻における渦筒半径 r_0 は、(6) 式より

$$r_0 = 2\sqrt{\frac{\nu x_0}{U}}$$

故に、

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{x}{x_0}} \quad (7)$$

ところで r_0 に対する x_0 は、 $x_0=Ut_0=Ur_0^2/4\nu$ で求められるから (7) 式に代入すると $r(x)$ が求まる。すなわち、

$$\begin{aligned} r(x) &= r_0 \sqrt{\frac{x}{x_0}} = r_0 \sqrt{1 + \frac{x_1}{x_0}} \\ &= r_0 \sqrt{1 + \frac{4\nu x_1}{U r_0^2}} = \sqrt{r_0^2 + \frac{4\nu}{U} x_1} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで $x_1=x-x_0$ である。

渦糸の拡散については水槽実験を例にとろう。我々の場合水の動きは層流であるから、この動粘性係数は小さく、渦糸が発生して主流に流されて、下流300cmの点(時間にして43sec)で渦筒半径わずかに1.30cmであるべきことが計算から見出される(第1表)。従って我々の行う以下の計算では渦糸は拡散しないものとして、詳しい第

第1表 渦糸の拡散

主流速度 $U=7.04\text{cm/sec}$
 動粘性係数 $\nu=0.0098\text{cm}^2/\text{sec}$
 渦糸の強さ $K=19.28\text{cm}^2/\text{sec}$
 発生源における渦筒半径 $r_0=0.0\text{cm}$

x (cm)	r (cm)	v (cm/sec)
0	0.0	∞
10	0.237	12.94
20	0.335	9.16
30	0.410	7.48
40	0.474	6.47
50	0.530	5.79
100	0.749	4.10
200	1.059	2.90
300	1.297	2.37

x : 発生源からの距離(cm)
 r : x 点における渦筒半径(cm)
 v : 半径 r 点における速度
 (cm/sec)

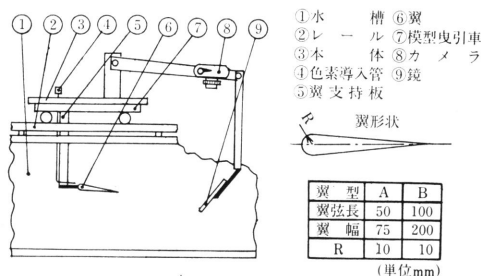
一近似が予想されるのであるが、まずこの事実を実験的に確かめる必要がある。

4. 実験装置と方法および結果

ここで一括して本報告で取扱う我々の実験装置の概要を述べておこう。

有限幅の翼については、いわゆる U 字渦が水槽実験においても明らかに認められたため、渦糸の相互作用の実験にこの一対の渦糸を用いることにする。後記の諸実験もすべてこの翼端から発生する渦糸を用いて行なったものである。

水槽実験における実験装置を第2図に示す。水槽の大きさは、長さ640cm、幅60cm、高さ45cmで、水槽の上縁に設けられた水平なレールの上を模型曳引車が走行する。模型曳引車の速度は、 $0\sim 100\text{cm/sec}$ が可能である。この模型曳引車に翼支持板を取りつける。翼は塩ビ板と黄銅棒とで作られ塗装されている。ネジによって翼支持板に取り付けられる。翼の角度は、支持板の車体への取り付け角度によって調節する。本実験においては、翼の失速などを考慮して $5\pm 1^\circ$ に調節された。撮影方法につ

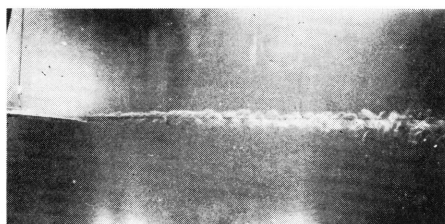


第2図 実験装置の概要

いては、翼の直後を写す場合は第2図のごとくで、水槽側面よりスリット光を入射して行う。また渦糸の流れ下る変化などの水槽側面からの撮影においてはさきの支柱を取りはずし、水槽外にカメラを取り付けて行う。可視化には色素法を用いた。色素にはローダミンBの水溶液を用い、色素導入管(内径1mm)から注入する。

そこで渦糸の拡散実験にもどり、 U 字渦の一方が他方と干渉しないために翼幅20cmのものを用い、渦糸に着色して幾つかの写真を撮った。その代表例が写真1である。うず巻に乗った色素の瞬間写真は撮影瞬間の多くの

写真1 渦糸の変形



$U=7.04\text{cm/sec}$, $Re=7135$

流線の束を示しているものと見なし、従って色素流の下流に向けての全体としての膨張がcoreの肥大化のあらわれであると解釈する。

写真から、色素の示す流線の内、一番外側を回るものの半径を読み取って r とし、計算上のcore半径を r_0 として表に示せば次のようになる。ただし $U=7.04\text{cm/sec}$, $\nu=0.00987\text{cm}^2/\text{sec}$ とする。実際上の渦糸の膨張は計算値よりもかなり速かであることが認められる。

写真2 翼core内の逆流



$U=12.35\text{cm/sec}$
 $Re=9920$ (翼型:B)

翼進行方向は右から左

この膨張の一番大きい理由はcore内に存在する上流向きに噴流であろう。渦巻の回転方向を翼理論の教える通りと考えると、色素は翼に向い、すなわち主流に対して逆流している。つまり翼渦

のcoreには翼に向かう流れのあることを示していて、航空機の翼渦に見出された噴流が、水槽実験においても存在するのが認められる。

更に正確を期して、色素導入管を用いて、翼通過直後に渦筒中心部に色素を注入した結果を写真2に示した。この写真からも明らかなように、水槽中の翼渦においても、翼をおいかける噴流が存在することがわかる。

第2表 core 半径の比較

翼からの距離 $x_1(\text{cm})$	色素流線半径 $r(\text{cm})$	計算上の渦糸半径 $r_0(\text{cm})$
0	0.34	0.34
10	0.68	0.41
20	0.91	0.48
30	1.14	0.53

概略の噴流速度を推定しよう。渦糸の強さ K としては翼理論の示す値 (θ は迎え角, c は翼弦長)

$$K = \pi U c \sin \theta \quad (9)$$

を採用する。噴流の存在は渦度の濃密化をもたらすとも考えられるが, order の推定には大差ないものとする, 既述のデータから

$$K = \pi \times 7.04 \times 10 \times \sin 5^\circ = 19.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

である。

一方上の表から見て一番外側の色素流線は, 渦筒半径の外にあると考えてよい。従って, その円周速度は $v = K/2\pi r$ で求められ, $x_1 = 20\text{cm}$ の位置でそれを計算すると, $v = 3.38\text{cm/sec}$ となる。一方この位置で色素流線は, 一周回るについて 3.6cm 前進しているから, 噴流による前進速度を U_j とすれば $U_j/v = 3.6/2\pi r$, ゆえに $U_j = 2.13\text{cm/sec}$ となり, これは翼速度の30%である。この値から見て, 渦糸内部の噴流速度は, かなり速いものであることが期待される。この様に噴流速度はかなり大きく, その速度が翼に近いほど小さいという仮定が成立すれば, 写真1に示す渦糸の拡散を粘性だけではなく, 噴流による拡散と考えることもできるのであるけれども, その流速分布測定が実行されていない現在, 推測の域を出ないことはもち論であり, これ以上の細部に言及することは避けなければならない。

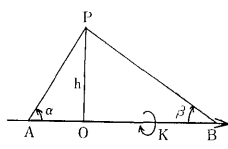
最後に, 以上の如くかなりの膨張が見込まれるにもかかわらず, 渦糸の相互作用研究に際してはこれを一本の渦糸, または一本の一樣断面積渦筒と見なす近似が, 第一近似として許されることは明らかであって, 今後はこの近似の範囲内で考えることとしよう。

5. 渦糸の相互作用

一本の渦糸が存在するとき, その渦糸による流速の場は Biot-Savart の法則で求められる。この法則を直線渦糸の有限長部分に適用し, 第3図のように渦糸の強さ K , $\alpha = \angle BAP$, $\beta = \angle ABP$, h は P から AB におろした垂線の長さとする, 容易に

$$v_P = \frac{K}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (10)$$

となつて, これが渦糸 AB によって P 点に誘導される速



第3図 有限長直線渦

糸の速度計算

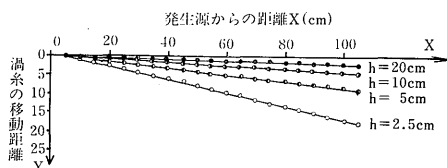
の渦糸の点 P に誘導する速度は, (10)式からただちに求める。この誘導速度 v_P と主流速度 U とで速度三角形を書き, その合成された速度を V とすると, この V の方向が渦糸の移動方向にほかならない。ゆえに各点における V を接線的に連ねてゆけばそれが一渦糸の他渦糸の作用下における位置および形の変化を与えることとなる。

数値例を示そう。渦糸の循環値としては翼理論からの値(9)式: $K = \pi c U \sin \theta$ をそのまま用いることにするが, 個々の場合の近似値と見なして大過ないであろう。(9)式を(10)に代入して各点における速度の主流に対する傾きを求めると

$$\frac{v_P}{U} = \frac{c \sin \theta}{4h} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (11)$$

となる。ここで実験状態を考慮して, $c = 10\text{cm}$, $\theta = 5^\circ$, $\cos \beta = 1$ の条件の下に h を 20, 10, 5, 2.5cm と変化させた時の渦糸の位置と形の変化を見てみよう。第4図にそれを示す。横軸に発生源からの距離, 縦軸にそれに直角方向の渦糸の移動距離を取っている。

この結果は, 半無限渦糸の各部分が主流速度にほとん



第4図 渦糸による他の平行渦糸の移動距離

ど比例して下向き (図上で) に動くことを示しているが, もち論これは第一近似値にほかならない。第二近似に進む計算は多少複雑であると共に, 翼後流の流速分布や渦度分布の不正確さに妨げられて, この精密化に期待できないことから, この第二次補正は行なわない。第一近似で十分と考えられる場合, すなわち $h = 10\text{cm} \sim 20\text{cm}$ の際にだけ計算値を参照できることとなるが, その最も重要な結論の一つは, 二本の渦糸間隔が 10cm の order では相互作用が小さくて, 発生源から 20cm 程度まではほとんど渦糸を変位せしめないということである。

この場合の実験写真は既に示した写真1である。この写真を渦糸の上下移動の検証として眺めるとき, わずか

な下降の痕跡が示されているに過ぎず計算結果と定性的に一致すると言えるであろう。

次には二渦糸間距離を種々変更する。このためには第2図に示す実験装置を用いて、2枚のA型翼を平行に走行させ、その翼と翼の間隔を色々かえる。その結果を写真3に示す。翼端後方10~15cmの所にスリット光を入れて写したものである。

この結果から見て、翼間隔 $d=20\text{mm}$ においてはU字渦が二つ見えるだけでほとんど相互の干渉は見られない。 $d=10\text{mm}$ においては、多少の干渉が見られ、中央の二本の渦糸が持ち上がってきているが、それと同時に巻き込み速度そのものが落ちてきているのがわかる。 $d=5\text{mm}$ においては、相互作用がより顕著に現われ、同時に益々巻き込み速度が落ちる。 $d=0\text{mm}$ においては、一枚の翼と同様で両端に二個の巻き込みが見られるのみである。中央の二本の渦糸が相互に他を持ち上げるように働いていることは明らかであって、定性的には理解されるところであるが、近づくほど近づくほど回転速度、すなわち渦糸の強さが減少するのは、中央間げき部分から流れ出る渦度

写真3 U字渦の干渉



$d=20\text{mm}$, $u=1.08\text{cm/sec}$
 $Re=348$



$d=10\text{mm}$, $u=1.68\text{cm/sec}$
 $Re=647$



$d=5\text{mm}$, $u=0.822\text{cm/sec}$
 $Re=272$



$d=0\text{mm}$, $u=1.15\text{cm/sec}$
 $Re=405$

R_e は代表長さとして翼弦長をとる

が減少するなどを示していて、これは翼端同志の交互作用が、近づくほど近づくほど一方から他方にわたる束縛渦糸を増大し、従ってこの間げきにおいて流れ下る二本の渦糸の弱化を来すことを意味する。それゆえ二本の渦糸の交互作用を検討する実験としては不適当な装置であることがわかる。定性的ながらも期待される方向に交互作用が見出されたことを以て満足しなければならない。

6. 壁が渦筒に及ぼす力

一本の渦糸は slender flexible cylinder と見なして流体力学的に正しいことが種々の計算結果から示されている²⁾。ここでもこの考え方に従って、渦筒を flexible な円筒で置きかえてよいという単純化の下に計算を進める。

今第5図のように、壁面から f だけ隔てた点に渦筒が存在する場合について考える。渦筒は、 $z=0$ に中心をもつ半径 a の円柱であって、この円柱の回りの複素ポテンシャル $W(=\phi+i\Psi)$ は、壁のないとき

$$W = -\frac{K}{2\pi i} \ln z \quad (12)$$

で表わされる。壁の条件は、壁に関する鏡像の位置($x=0$, $y=2f$)に置かれた強さが等しく回転方向が逆の像渦筒によって実現させうることを考慮すれば、壁に近い実渦筒の回りの複素ポテンシャルは

$$W = \frac{K}{2\pi i} \ln z + \frac{-K}{2\pi i} \ln(z-2if) \quad (13)$$

となる。ここで(13)式は実は渦糸の回りの複素ポテンシャルであって、渦糸を渦筒とするには、(13)式の右辺の第二項が実渦筒内に流れ

の場を発生しないようにすればよい。このためには、Milne-Thomson の円定理によって、

$$f(Z) = -\frac{K}{2\pi i} \ln\left(\frac{a^2}{z} + 2if\right) \quad (14)$$

を(13)式の右辺に加えればよい。すなわち壁面近くの渦筒の回りの複素ポテンシャルは

$$W = \frac{K}{2\pi i} \ln z - \frac{K}{2\pi i} \ln(z-2if) + \frac{K}{2\pi i} \ln\left(\frac{a^2}{z} + 2if\right) \quad (15)$$

によって近似的に表現される。ここで近似的というのは、右辺第三項の壁効果が小さくて無視されていることを意味している。

さて複素ポテンシャルを W 、渦筒をとり囲み内部に流

の特異点をもたない任意の閉曲線を C とすると, その渦筒に働く力 (P_x, P_y) は, Blasius の定理

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} \rho i \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (16)$$

を用いて求めることができる。すなわち(15)式より $\frac{dW}{dz}$ を求めてこれを(16)式に代入すれば

$$P_x - iP_y = -\frac{\rho K^2}{8\pi^2} i \oint_C \left\{ \frac{1}{(z-2if)^2} - \frac{2}{(z-2if)\left(z - \frac{a^2}{2f}i\right)} + \frac{1}{\left(z - \frac{a^2}{2f}i\right)^2} \right\} dz \quad (17)$$

となるが, 右辺の第一項, 第三項の周回積分値は零であるから唯第二項だけを計算すればよい。コーシーの積分公式を用いて, これは

$$P_x - iP_y = -i\rho \frac{K^2}{4\pi f} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{2f}\right)^2}; \quad (18)$$

となり, すなわち渦筒に働く力は壁にむかって

$$P_y = \rho KV \left[V = \frac{K}{4\pi f \left\{ 1 - \left(\frac{a}{2f}\right)^2 \right\}} \right] \quad (18')$$

の大きさであることがわかる。この時の速度 V は, 像渦の中心から $f+f'$ (ここで $f' = f\left(1 - \frac{a^2}{2f^2}\right)$) の位置の像渦による流速である。渦糸 ($a=0$) ならば $f'=f$ であるから上の f' は渦が太きをもつことによって, 渦筒にはね返る流速の平均が若干壁に近い値をもつことを示している。たとえば $f=2a$ とすれば, $f' = \frac{7}{8}f = \frac{7}{4}a = a + \frac{3}{4}a$ である。

壁面が渦筒に対して作用する力は上に見るごとくであるが, これは渦筒が動かないという条件のもとで成立したものであって, 実際は壁面近くに置かれた渦筒は, 壁に平行に等速運動することが知られている。そこで渦筒がいかなる速度で移動するかを求めてみよう。

渦筒が壁に平行に u_w の速度で動いているとしよう。ここで渦筒を静止させて考えると, 水に $-u_w$ の流速を与えればよいから, 水の複素ポテンシャル $W_1(z)$ は

$$W_1(z) = -u_w \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + W \quad (19)$$

となり, ここで $W(z)$ は, (15)式そのままである。従って, ダッシュで z 微分を表わすこととして,

$$W_1'(z) = -u_w \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + W'$$

を Blasius の積分公式(16)式に用いて

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} \rho i \oint_C \left[W_1'(z) \right]^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} \rho i \oint_C (-2u_w W') dz + \frac{1}{2} \rho i \oint_C \left[W'(z) \right]^2 dz + \dots \quad (20)$$

ここで周積分に対して明らかに零となる諸項は省略してある。(20)式右辺第一項は積分値 $-i\rho u_w K$ を与え, 第二項は(18')式より $-i\rho KV$ を与える。従って,

$$P_x = 0 \quad P_y = \rho K(V + u_w) \quad (21)$$

とくに $P_x = P_y = 0$ となるのは $u_w = -V$ のときで, 渦筒は一樣流速 $-V$ で壁に平行に動くことによって力を受けない。渦糸 ($a=0$) とすれば, $u_w = -V|_{a=0} = \frac{K}{4\pi f}$ であって, これはよく知られている値である。

一点から発生して下流に流れる渦筒の定常位置を問題とすると, 壁の存在による効果は, 壁に対して対称な像渦筒を考えることによって簡単化できるが, その際主流に乗って流れる渦筒各部分の y 方向流速を必要とし, これに対して第一近似として(18')式を用いてよいことは明らかである。すなわち渦筒が壁に平行に動く速度は, (18')式より

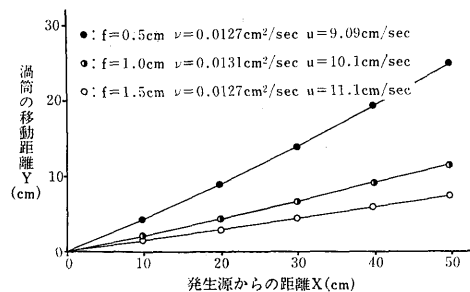
$$u_w = -V = -\frac{K}{4\pi f \left\{ 1 - \left(\frac{a}{2f}\right)^2 \right\}}$$

この式中の渦筒半径 a を(6)式で与え循環の強さ K を(9)式で与えると u_w は

$$u_w = -\frac{CU \sin \theta}{4f \left(1 - \frac{Vx}{Uf^2} \right)} \quad (22)$$

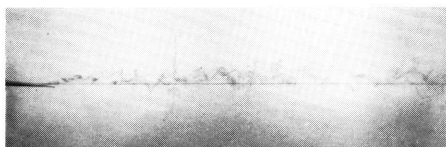
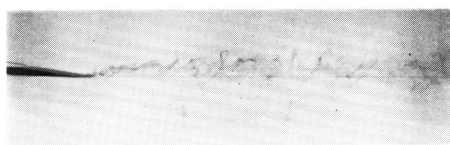
で表わされる。流れ下った各点においてこの u_w と主流との合成速度の傾きを連ねてゆけば, 渦筒の移動が求まる。この計算結果を第6図に示すが, 既に平行渦筒の相互作用の際に述べたごとく, これら第一近似としての傾きは, 数個の近似化の結合結果であるために数値的には誤差が多く, 定性的な情報としてだけ受け取られるべきものである。

これについての実験結果を写真4に示す。この写真から見て翼端直後においては, 計算例と同様, 壁面の影響により, 壁面に近いほど渦筒のもち上がりが大きいこと



第6図 渦筒の移動距離

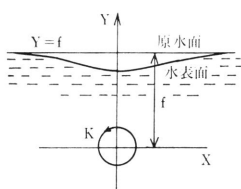
写真4 壁による渦筒移動

(a) $f=1.5\text{cm}$, $U=11.1\text{cm/sec}$
 $Re=8340$ (b) $f=1.0\text{cm}$, $U=10.1\text{cm/sec}$
 $Re=7711$ (c) $f=0.5\text{cm}$, $U=9.09\text{cm/sec}$
 $Re=7136$

がわかる。しかし、以後においてはもち上がりはほとんど見られず、水平方向に流れている。写真1の結果から、壁の存在を無視できる場合には、翼のU型渦の法則に従って渦筒は徐々に下がるべきであるから、水平方向に流れている事実は、写真1の効果を打ち消す程度の上向き速度が働いているか、あるいは、何らかの理由で渦としての性質を失ない、ただ流れているといったことが考えられる。そのほかにこの三枚の写真の特長は、壁面に近い渦糸は色素流が分散していることである。この色素流の分散が渦筒の水平に流れる事実と直接関連していて、渦筒の breakdown⁴⁾等を示唆するかと考えられるが、今のところその検証はおよばない。

7. 水表面が渦糸、渦筒におよぼす力

水表面近くに渦糸が存在するといかなる力をうけ、又いかに水表面が変化するかを考えてみよう(第7図)。その



第7図 渦糸による水表面降下(1)

の第一近似として、第5図における壁面($y=f$ なる流線)上における圧力分布を求め、その圧力分布を自由表面の位置の変化に変換することを考える。壁面 $y=f$ 上の圧力分布は Bernoulli の式 ($|x| \rightarrow \infty$ において

$$u=0, p=0)$$

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = 0 \quad (23)$$

から求めることができる。ここでその速度 u を知るために、壁面上における複素ポテンシャル $W(z)|_{z=x+if}$ を求め

ると(13)式より $W(x+if) = \frac{K\theta}{\pi}$ が見出され、ここに $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f}{x}\right)$ である。これから $\phi = \frac{K\theta}{\pi}$, $\Psi=0$ となり、

これを用いて x, y 方向の速度成分 (u, v) :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{Kf}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + f^2}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

が見出される。従って壁面上の圧力分布は(23)式より

$$p = -\frac{1}{2}\rho u^2 = -\frac{1}{2}\rho \left(\frac{Kf}{\pi}\right)^2 / (x^2 + f^2)^2 \quad (24)$$

となる。

そこでこの壁面上の流速分布 (u, v) をそのまま水表面流速分布の第一近似として採用すれば、自由表面の Bernoulli の式 ($|x| \rightarrow \infty : u=v=0, y=0$)

$$\frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \rho g y = 0 \quad (25)$$

を(23)式と比較することによって $y = -\frac{p}{\rho g}$, すなわち(24)から

$$y = -\frac{1}{2g} \left(\frac{Kf}{\pi}\right)^2 / (x^2 + f^2)^2 \quad (26)$$

という水面降下の近似値が見出される。

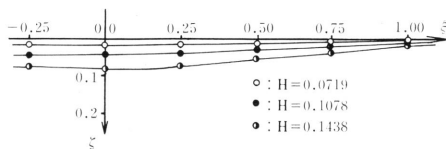
便宜上 (x, y) を $\frac{x}{f} = \xi$, $-\frac{y}{f} = \zeta$ によって変換し、 (ξ, ζ) で表わすことにすると(26)式は

$$H = \sqrt{\frac{\zeta}{4/(\xi^2 + 1)}} \quad (26')$$

となり、ここで定数 H は

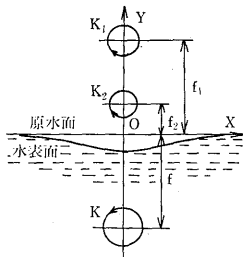
$$H = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{K}{2\pi f} \quad (26'')$$

である。 H をパラメーターとして縦軸に ζ , 横軸に ξ を取って水表面曲線を表わせば、第8図が得られる。



第8図 水表面曲線

さて上のあらい近似をもう一段精密にすることを考え、第9図に示すごとく像渦糸二個を設けてみよう。計算の都合上、 x 軸をもとの水表面とし、水表面の左右対称性を保つために二個の渦糸は y 軸上にとり、(K_1 ,



第9図 渦糸による水面降下(2)

$y=f_1$ (K_2 , $y=f_2$) をそれらの強さ, 位置とする。すると実渦糸と合せたその複素ポテンシャル $W(z)$ は

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{K}{2\pi i} \ln(z+if) - \frac{K_1}{2\pi i} \ln(z-if_1) \\ &\quad - \frac{K_2}{2\pi i} \ln(z-if_2) \\ &= \frac{K}{2\pi i} \ln\{(z+if)(z-if_1)-p_1 \\ &\quad (z-if_2)-p_2\} \end{aligned} \quad (27)$$

であり, ここで

$$p_1 = \frac{K_1}{K}, \quad p_2 = \frac{K_2}{K} \quad (28)$$

である。(27)式より流れ関数 $\Psi(x, y)$ を求めると

$$\Psi = -\frac{K}{4\pi} \ln \left[\frac{x^2 + (y+f)^2}{\{x^2 + (y-f_1)^2\}^{p_1} \{x^2 + (y-f_2)^2\}^{p_2}} \right] \quad (29)$$

となり, 従って流線の方程式は,

$$\frac{x^2 + (y+f)^2}{\{x^2 + (y-f_1)^2\}^{p_1} \{x^2 + (y-f_2)^2\}^{p_2}} = \text{const.}$$

である。とくに水表面流線を $\Psi=0$ とすれば, それは

$$x^2 + (y+f)^2 = \{x^2 + (y-f_1)^2\}^{p_1} \{x^2 + (y-f_2)^2\}^{p_2} \quad (30)$$

で与えられる。

水表面流線(30)式は, p_1, p_2, f_1, f_2 の四個の任意定数を含んでいるので, その決定には四個の関係式を必要とする。そこでまず(30)式の水表面流線が第9図に設定したごとく, $|x| \gg f, f_1, f_2$ において $y=0$ に一致するための条件を見よう。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{K}{2\pi f} \left\{ \frac{1-\zeta}{\xi^2 + (1-\zeta)^2} + p_1 \frac{\lambda_1 + \zeta}{\xi^2 + (\lambda_1 + \zeta)^2} + p_2 \frac{\lambda_2 + \zeta}{\xi^2 + (\lambda_2 + \zeta)^2} \right\} = -\frac{K}{2\pi f} F(\zeta) \quad (37)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{K}{2\pi f} \cdot \xi \left\{ \frac{1}{\xi^2 + (1-\zeta)^2} - p_1 \frac{1}{\xi^2 + (\lambda_1 + \zeta)^2} - p_2 \frac{1}{\xi^2 + (\lambda_2 + \zeta)^2} \right\} = \frac{K}{2\pi f} G(\zeta) \quad (38)$$

となるから

$$V^2 = \frac{K}{4\pi^2 f^2} (F^2 + G^2)$$

である。これを(35)式に代入して一定圧力条件が

$$H = \sqrt{\frac{\zeta}{F^2 + G^2}} \quad (39)$$

(30)式を書きかえて

$$x^2 \left\{ 1 + \left(\frac{y+f}{x} \right)^2 \right\} = x^{2p_1+2p_2} \left\{ 1 + \left(\frac{y-f_1}{x} \right)^2 \right\}^{p_1} \left\{ 1 + \left(\frac{y-f_2}{x} \right)^2 \right\}^{p_2}$$

とすればまず, 必要条件の一つ

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (31)$$

が見出される。従ってまた

$$1 + \left(\frac{y+f}{x} \right)^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{y-f_1}{x} \right)^2 \right\}^{p_1} \left\{ 1 + \left(\frac{y-f_2}{x} \right)^2 \right\}^{p_2}$$

が成立し, 二項定理で右辺を展開すれば水表面流線の形として

$$(y+f)^2 - p_1 (y-f_1)^2 - p_2 (y-f_2)^2 = 0 \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

が見出される。これは(31)式によって

$$y = \frac{p_1 f_1^2 + p_2 f_2^2 - f^2}{2(f + p_1 f_1 + p_2 f_2)} + 0 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \quad (32)$$

と書かれ, 従って $|x| \rightarrow \infty$ において $y=0$ となるためには, 右辺の第一項が零であることを要求する。すなわち,

$$\frac{f_1}{f} = \lambda_1, \quad \frac{f_2}{f} = \lambda_2 \quad (33)$$

とするとき

$$p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 = 1 \quad (34)$$

が成立することが必要となる。かくして $|x| \rightarrow \infty$ で $y=0$ が水表面であるための条件は, (31), (34)式で与えられる。

残る2つの条件としては, 水表面流線において, 一定圧力条件(35), すなわち書きかえて,

$$-\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g y = 0 \quad (V = |\mathbf{v}|) \quad (35)$$

ができるだけ詳しく成立することを要求しよう。表面流線上の位置 (x, y) を, 既に行った如く $\frac{x}{f} = \xi, \frac{y}{f} = \zeta$

によって (ξ, ζ) で表わすと, 水表面流線(30)式は

$$\xi^2 + (1-\zeta)^2 = \{\xi^2 + (\zeta + \lambda_1)^2\}^{p_1} \cdot \{\xi^2 + (\zeta + \lambda_2)^2\}^{p_2} \quad (36)$$

となり, その上の一点 (ξ, ζ) での速度 (u, v) は(29)式の Ψ から見出されて

と書かれ, 定数 H は(26)'' の値である。この(39)式が主要なる二点 $\xi=0, \xi=\xi_1$ (従って $\xi=-\xi_1$) において成立することが, 任意定数を決定する二条件となる。すなわち, $\xi=0, \xi=\xi_1$ における ζ_0, ζ_1 を(36)式から計算し, それを(37), (38)式に代入して F_0, G_0, F_1, G_1 を求めて, そ

これらの値を39式の右辺に代入したとき、ちょうど左辺の H の値が得られるという条件、この条件を設定すれば31), 34式と合せて四個の条件となり、 $p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2$ を確定できるのである。

しかしながら、この計算はかなり面倒である。それゆえ問題を逆にして、まず31), 34式を満たすように $(p_1, \lambda_1)(p_2, \lambda_2)$ を取り、それに対して39式から $\xi=0$ に対する ζ の値 ζ_0 を定め、この $\xi=0, \zeta=\zeta_0$ に対して39式から H を計算してそれを H_0 とする。

次に ξ の任意の数個の値をとり、その各値に対する ζ を39式から求めて、先の ζ_0 と合せて (ξ, ζ) 曲線、すなわち水表面流線を描く。同時にこれら ζ の各々の値に対して H を計算し、それが H_0 に近い値を与えるかを調べる。 H の値に H_0 と大きく異なるものがあれば、あらた

第3表 水表面流線の計算例

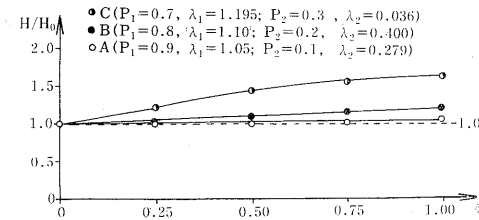
A : $(p_1=0.9, \lambda_1=1.05)(p_2=0.1, \lambda_2=0.279)$

B : $(p_1=0.8, \lambda_1=1.10)(p_2=0.2, \lambda_2=0.400)$

C : $(p_1=0.7, \lambda_1=1.195)(p_2=0.3, \lambda_2=0.036)$

ξ	ζ			H/H_0		
	A	B	C	A	B	C
0.00	0.0382	0.0485	0.1950	1.00	1.00	1.00
0.25	0.0307	0.0423	0.1544	1.00	1.03	1.22
0.50	0.0199	0.0308	0.0978	0.99	1.09	1.44
0.75	0.0128	0.0214	0.0622	1.01	1.16	1.55
1.00	0.0086	0.0150	0.0417	1.06	1.26	1.63

($H_0: \xi=0$ のときの H)



第10図 近似水表面の H/H_0

めて $(p_1, \lambda_1)(p_2, \lambda_2)$ を選り直して、上の計算をくり返し、すべて H の値が、ほぼ一致するようにできればよい。以下に3種の計算例 A, B, C を第3表および第10図に示す。3例の中では、A ($p_1=0.9, \lambda_1=1.05; p_2=0.1, \lambda_2=0.279$) の場合に $H/H_0 \approx 1.00$ が十分満足されており、その水表面の降下は第4表Ⅱ列に示すごとくである。

この第二近似の一例Aを先に述べた第一近似と比較して見よう。今の場合 $H=H_0=0.0895$ であるから、これを29'に用いて (ξ, ζ) を計算する。この第一近似の水表面降下は第4表Ⅰ列に示されているが、このⅠ、Ⅱ列の

一致はかなり良好である。従ってこの第二近似Aは、第一近似の与えた自由表面を実現するための像渦系の決定にほかならないことがわかる。

第4表 水表面降下

ξ	ζ	
	Ⅰ	Ⅱ
0.00	0.0320	0.0382
0.25	0.0284	0.0307
0.50	0.0205	0.0199
0.75	0.0131	0.0128
1.00	0.0080	0.0086

上のようにして、水表面と一つの渦系の存在する場が、水表面を除いた適当な渦系の場に版着せしめられるとすれば、壁の影響の場合と全く同様にして、実渦系のうける力を計算することができる。以下それについて述べよう。上述のごとく

p_1, p_2, f_1, f_2 が決定すると、複素ポテンシャル $W(z)$ は確定して27式で与えられる。さらに渦系の平行移動速度 U の存在を取り入れて

$$W_1(z) = -Uz + W(z) \quad (40)$$

とすれば

$$\left[\frac{d(W_1)}{dz} \right]^2 = -\frac{uK}{\pi i} \cdot \frac{1}{z+if} - \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{K}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z+if} \left(\frac{K_1}{z-if_1} + \frac{K_2}{z-if_2} + \dots \right) \quad (41)$$

となり、周回積分において明らかに零となる諸項は省略されている。(41)を Blasius 公式に代入すれば

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} \rho i \left[-2uK - \frac{K}{\pi i} \left(\frac{K_1}{-if-if_1} - \frac{K_2}{-if-if_2} \right) \right];$$

ゆえに

$$P_x = 0, \quad P_y = \rho u K + \frac{\rho K}{2\pi} \left(\frac{K_1}{f+f_1} - \frac{K_2}{f+f_2} \right) \quad (42)$$

が見出される。これから渦糸が静止のとき

$$P_y = \frac{\rho K}{2\pi} \left(\frac{K_1}{f+f_1} + \frac{K_2}{f+f_2} \right) \quad (43)$$

が水面に向って働き、渦糸が

$$U = -\frac{K}{2\pi f} \left(\frac{p_1}{1+\lambda_1} + \frac{p_2}{1+\lambda_2} \right)$$

の速度で水表面に平行 (x の負方向) に移動するとき、Kutta-Joukowski の揚力は零となる。

ここで静止した渦糸に働く力を、壁面の場合と自由表面の場合とについて比較してみると、壁については18'式に $a=0$ とおけば

$$P_{yw} = \frac{\rho K^2}{4\pi f}$$

となり、43式との比Aをとれば

$$A = \frac{P_y f}{P_{yw}} = 2 \left(\frac{p_1}{1+\lambda_1} - \frac{p_2}{1+\lambda_2} \right);$$

先に求めた $(p_1=0.9, \lambda_1=1.05; p_2=0.1, \lambda_2=0.279)$ を代入すれば、 $A=1.03$ を得、揚力に関して壁面の場合と自由

表面の場合との大きい相異は見られない。しかしこれは、渦糸の位置が水面下深いところにあるためであって、その影響は、上の表から、水面を3~4%引き下げるにとどまり、従って壁の場合との差異も数パーセントにとどまるのである。

渦糸を更に水面に近づければ、水面としての特性をはっきり示すはずであるが、この際の計算には更に詳しい近似を必要とすると共に、これを比較検討すべき実験結果をも持ち合わせないので、ここでは取り上げないこととする。

$$W(z') = \frac{K}{2\pi i} [-p_1 \ln\{z' - i(f+f_2)\} + p_1 \ln\{a^2 + iz'(f+f_1)\} - p_2 \ln\{z' - i(f+f_2)\} + p_2 \ln\{a^2 + iz'(f+f_2)\}] \quad (44)$$

これを Blasius の公式に取り入れて、渦筒に働く力を求めるとき、

$$P_x - iP_y = -i \frac{\rho K^2}{2\pi} \left\{ \frac{p_1^2}{f+f_1 - \frac{a^2}{f+f_1}} + \frac{p_2^2}{f+f_2 - \frac{a^2}{f+f_2}} + 2p_1 p_2 \frac{f + \frac{1}{2}(f_1+f_2)}{(f+f_1)(f+f_2) - a^2} \right\}$$

となる。ゆえに

$$P_x = 0$$

$$P_y = \frac{\rho K^2}{2\pi} \left\{ \frac{p_1^2(f+f_1)}{(f+f_1)^2 - a^2} + \frac{p_2^2(f+f_2)}{(f+f_2)^2 - a^2} + 2p_1 p_2 \frac{f + \frac{1}{2}(f_1+f_2)}{(f+f_1)(f+f_2) - a^2} \right\} \quad (45)$$

この(45)式において、 $f_1=f_2=f$ とすればこれは壁の存在する場合に帰着し

$$P_y = \frac{\rho K^2}{2\pi} \left(\frac{p_1^2}{2f - \frac{a^2}{2f}} + \frac{p_2^2}{2f - \frac{a^2}{2f}} + 2p_1 p_2 \frac{1}{2f - \frac{a^2}{2f}} \right) = \rho \frac{K^2}{4\pi f} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{2f}\right)^2}$$

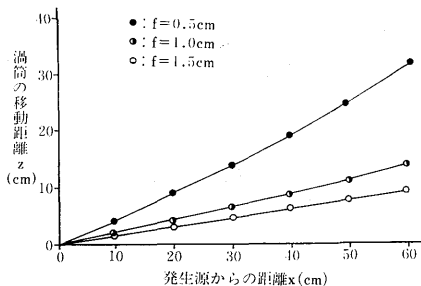
となるが、これは、(18)式にちょうど一致する。

(45)式に $\left(\frac{f_1}{f}, \frac{f_2}{f}\right) = (\lambda_1, \lambda_2)$ のほか $a/f = a$ の記号を導入、更に、 $P_y = \rho K V$ によって定速 V を導入すれば、

$$V = \frac{K}{2\pi f} \left\{ \frac{p_1^2(1+\lambda_1)}{(1+\lambda_1)^2 - a^2} + \frac{p_2(1+\lambda_2)}{(1+\lambda_2)^2 - a^2} + \frac{p_1 p_2(2+\lambda_1+\lambda_2)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) - a^2} \right\} \quad (46)$$

を得る。 $U = -V$ で渦を動かせば揚力が零となることは明らかである。

次に(46)式を用いた数値例を示そう。渦糸の拡散については、前述の水槽実験に際しての計算結果を使用する。



第11図 水表面の存在による渦筒の移動距離

図式に示す複素ポテンシャル W は、水表面近くに渦糸が存在する時のものである。そこで渦筒を考える場合には、図式の中の二つの像渦糸 $(K_1, f_1)(K_2, f_2)$ が実渦筒 $(K, -f; \text{半径 } a)$ の内部に流れの場を作らないように Milne-Thomson の円定理を用いて実渦筒のまわりの場を修正すればよい。Milne-Thomson の円定理では、円の中心が原点にとられているから、図式をこの座標に改めるべく、 $z = z' - if$ の置換を行うと同時に Milne-Thomson の円定理を用いれば

諸定数を $[K=19.28\text{cm}^2/\text{sec}, U=7.04\text{cm}/\text{sec}, \nu=0.0098\text{cm}^2/\text{sec}, p_1=0.9, \lambda_1=1.05, p_2=0.1, \lambda_2=0.279]$ として、一点から発生して流れる渦筒の定常位置を求めれば第11図のごとくである。縦軸には、渦筒が水表面に平行に移動する距離 $z(\text{cm})$ をとり、横軸には、渦筒の発生源からの距離 $x(\text{cm})$ がとってある。計数法は前に用いた第一近似法そのままである。

8. 結 言

以上において渦筒に関する二、三の性質を計算し、それらの中のあるものを実験と比較検討した。計算も実験もかなりむずかしい問題であるために、一応定性的な一致が見出されはしたけれども、数値的な合致からは程遠い。その上質的差異を示す点も見出された。すなわち渦

の拡散が予想以上に速に行なわれていることであり、この拡散ともなつて実質的な渦作用の能力を減少していると推察されることである。これら原因としては core 内部の噴流と渦筒の breakdown が考えられるが、この内前者については、水中においても飛行機翼の渦におけると同様に、渦筒の内部に明らかな噴流が見出された。最後に水表面と渦筒との交互作用については一応の計算式を見出したけれども、これを実証するには至っていない。

9. 謝 辞

本報告をまとめるにあたり、御指導下さった山田彦児教授に心からの感謝を申し上げるとともに、本学機械工学科卒業研究学生諸君に御礼を申し述べたい。

文 献

- 1) S. E. Widnall; The structure and dynamics of vortex filaments, *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol. 7 (1975) pp. 141—165.
- 2) S. E. Widnall and B. Bliss; Slender-body analysis of a vortex filament, *J. Fluid Mech.* (1971), Vol. 50, Part 2, pp. 335—353.
- 3) A. Schaffer; A Study of Vortex Cancellation, *J. Aero Space Sciences* (1960), Vol. 27, pp. 193—197.
- 4) 今井功; 流体力学 (前編), 裳華房, pp. 136—139.
- 5) G. K. Batchelor (橋本英典他訳); 入門流体力学, 東京電機大学出版, pp. 556—557.
- 6) G. K. Batchelor; Axial flow in trailing line vortices, *J. Fluid Mech.* (1964), Vol. 20, pp. 645—658.
- 7) L. M. Milne-Thomson; *Theoretical hydrodynamics*, 5ed. Macmillan (1968) p. 157.