

板厚が一方方向に直線的に変化する矩形板の座屈応力の近似式

坂 田 敏 行*

An Approximate Formula for the Determination of the Critical Buckling Load of Rectangular Plates with Thickness Varying Linearly in One Direction

Toshiyuki SAKATA*

(Received September 9, 1975)

An approximate formula is derived for the evaluation of the critical buckling load of the rectangular plate with thickness varying linearly in one direction by the use of the previously reported formula for the natural frequencies of the same plate through examining the correlation between solutions for buckling problems of the plate with nonuniform thickness and for flexural vibrating problems of them.

1. 緒 言

不等厚板の座屈を論じた研究は既にいくつか発表されている^{1, 2)}。また、電子計算機を用いれば座屈応力を計算するのはさほど困難ではない。しかしながら、計算にはかなりの労力と時間を必要とするので、座屈応力の簡単かつ高精度の近似式を導くことは有益であると考えられる。ここではまず最初に、対向する二辺が支持された不等厚矩形板の対向する支持辺に板厚に比例する圧縮荷重が作用する場合の固有値方程式の根は同一形状、同一境界条件の板の振動数方程式の根と一致することを明らかにする。従って、微分方程式を解かずに座屈応力をその板の固有角振動数から推定することが可能である(4. 計算例参照)。ところで、著者は先に対向する二辺が支持され、板厚が直線的に変化する不等厚矩形板の固有角振動数の近似式を報告したが^{3, 4)}、座屈の場合には形矩形板の二辺の比が狭い範囲内でのみこの近似式が成立すれば良い。以上の考察より、対向する二辺が支持され、板厚が直線的に変化する不等厚矩形板の座屈応力は簡単な近似式により表わされることを明らかにする。

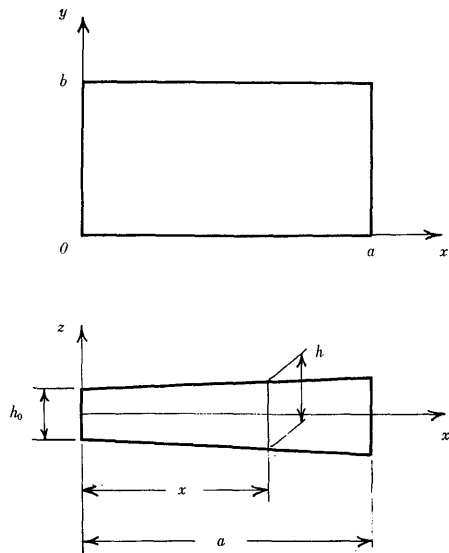


図1 板の形状

2. 換算式の誘導

図1に示すように、板の中立面上に x , y 軸を、中立面に垂直に z 軸を考える。板厚は x 方向にのみ直線的に変化するものとする。すなわち、任意点の板厚を h , x

*機械・生産機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

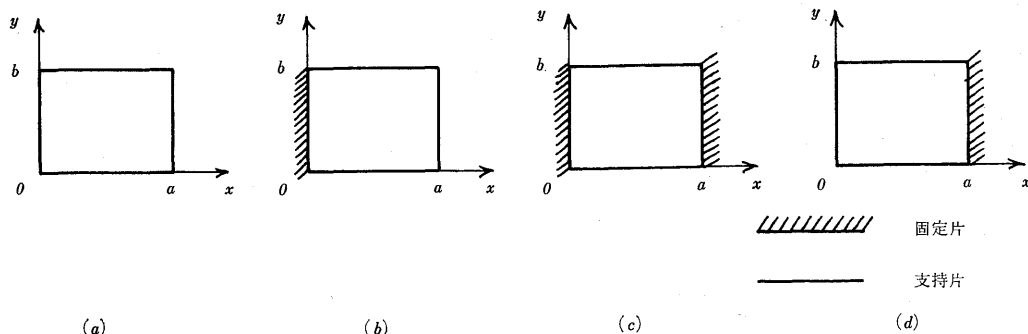


図2 板の境界条件

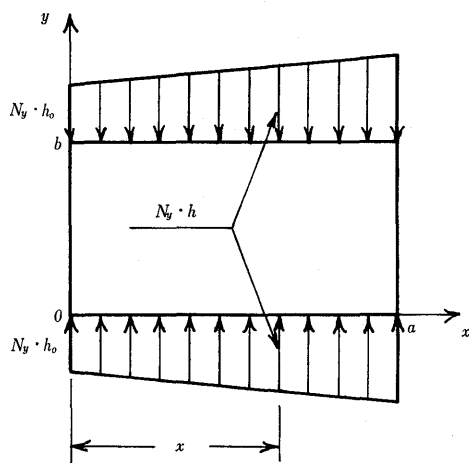


図3 圧縮荷重の大きさおよび作用方向

$= 0$ のときの板厚を h_0 とすれば,

$$e = \frac{h}{h_0} = 1 + \frac{\alpha}{a} x \quad (1)$$

ただし, α は定数である。

板の境界条件は図2に示す場合を考える。今, 図3に示すように, 板厚に比例する単位長さ当りの面内力 $N_y \cdot h$ (従って, N_y は板の側面に作用する応力を表わし, その大きさは場所により変化しない値となる) が作用する場合の座屈応力 $N_{ycr}(\alpha)$ を面内力が作用しない板の固有角振動数から求める換算式を次の要領で導く。

2.1 座屈の固有値方程式の誘導

図1に示す板に, 図3に示す圧縮力 $N_y \cdot h$ が作用する時の基礎方程式は,

$$e^3 \nabla^4 w + 2 \frac{de^3}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + \frac{d^2 e^3}{dx^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{N_y h_0}{D_0} e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

ただし, w , ν はそれぞれ板のたわみ, およびポアソン比を表わす。また, D_0 は $x=0$ の位置における板の曲げ剛さであり, 次式で与えられる。

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

ただし, E は板の縦弾性係数である。

文献⁴⁾と同様に, たわみ w を式(4)で表わせば板の境界条件(図2)は満足される。

$$w = f(x) \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L w_{kl} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \quad (4)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 1 & (\text{図2-(a)}) \\ &= x(x-2a) & (\text{図2-(b)}) \\ &= x(x-a) & (\text{図2-(c)}) \\ &= (x+a)(x-a) & (\text{図2-(d)}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)を式(2)に代入すれば,

$$\sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^K w_{kl} \left\{ E_{kl}^{(1)} - \frac{N_y h_0}{D_0} \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 E_{kl}^{(2)} \right\} \right] \times \sin \frac{l\pi}{b} y = 0 \quad (6)$$

ただし,

$$E_{kl}^{(1)} = C_{kl}^{SS} \sin \frac{k\pi}{a} x + C_{kl}^{CS} \cos \frac{k\pi}{a} x \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_{kl}^{SS} = e^3 & \left[- \left\{ 6 \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right\} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left\{ \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right\} f \right] - 2 \frac{de^3}{dx} \left[3 \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right] \frac{df}{dx} \\ & + \frac{d^2 e^3}{dx^2} \left[\frac{d^2 f}{dx^2} - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 f \right] - \nu \frac{d^2 e^3}{dx^2} \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 f \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_{kl}^{CS} = -4e^3 & \frac{k\pi}{a} \left\{ \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right\} \frac{df}{dx} \\ & + 2 \frac{k\pi}{a} \frac{de^3}{dx} \left[3 \frac{d^2 f}{dx^2} - \left\{ \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \right\} f \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$E_{kl}^{(2)} = e f \sin \frac{k\pi}{a} x \quad (10)$$

$E_{kl}^{(1)}$ をフーリエ級数に展開すれば,

$$E_{kl}^{(1)} = \sum_{m=1}^K B_{kl}^{ml(i)} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (11)$$

ただし,

$$B_{kl}^{m(1)} = -\frac{2}{a} \int_0^a E_{kl}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x dx \quad (12)$$

式 (11) を式(6)に代入すれば,

$$\sum_{k=1}^K w_{kl} \left[B_{kl}^{m(1)} - \frac{N_y h_0}{D_0} \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 B_{kl}^{m(2)} \right] = 0 \quad (13)$$

ただし, $m=1, 2, 3, \dots, K$

$l=1, 2, 3, \dots, L$

固有値方程式は,

$$\det | B_{kl}^{m(1)} - \frac{N_y h_0}{D_0} \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 B_{kl}^{m(2)} | = 0 \quad (14)$$

ただし, $k=1, 2, 3, \dots, K$

$m=1, 2, 3, \dots, K$

2.2 自由振動の振動数方程式

文献⁴⁾によれば, 図1に示す板の自由振動の振動数方程式は,

$$\det | B_{kl}^{m(1)} - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 B_{kl}^{m(2)} | = 0 \quad (15)$$

ただし, $k=1, 2, 3, \dots, K$

$m=1, 2, 3, \dots, K$

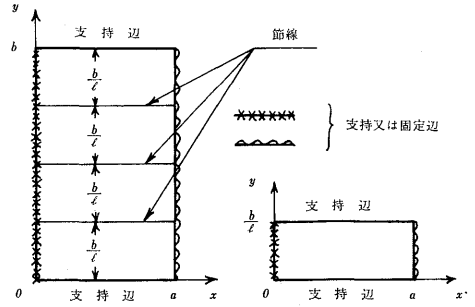
また, ρ は板の質量, ω は角振動数である。

2.3 換算方程式

式(14)および(15)の固有値をそれぞれ $N_y(m, n, \alpha)$ および $\omega(m, n, \alpha)$ で表わすことにする。ただし, m , n はそれぞれ y , x 軸に平行な節線の数であり, 式(14)および(15)の場合,

$$n = l - 1$$

が成立する。



(a) 固有角振動数 $\omega^*(0, l-1, \alpha)$

(b) 固有角振動数 $\omega(0, l, \alpha)$

図4 同一の固有角振動数を有する板

式 (14) および (15) より,

$$N_y(m, l-1, \alpha) = \rho \left(\frac{b}{l\pi} \right)^2 \omega(m, l-1, \alpha)^2 \quad (17)$$

この式を用いれば, $\omega(m, l-1, \alpha)$ より $N_y(m, l-1, \alpha)$ を計算することができる。従って, $N_y(m, l-1, \alpha)$ の最少値, すなわち座屈応力 $N_{ycr}(\alpha)$ を計算することができる。

3. 座屈荷重の近似式

図3に示すように圧縮荷重が作用する場合には, 式(17)の m は $m=0$ の場合のみを考えれば良い。文献⁴⁾の方法を用いれば式(17)の右辺の値 $\omega(0, l-1, \alpha)$ は簡単に計算できる。従って, 座屈応力 $N_{ycr}(\alpha)$ を求めることができる(4.計算例参照)が, ここではもう少し簡単に求める方法を説明する。

図4-(a)に示すように, x 軸に平行な節線が $(l-1)$ 個生ずる板の固有角振動数を $\omega^*(0, l-1, \alpha)$, 図4-

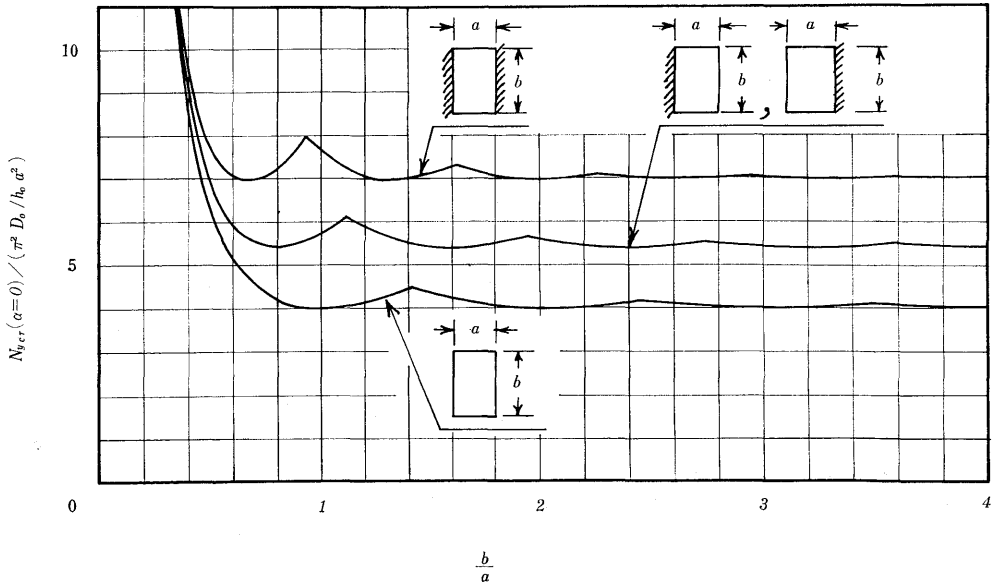


図5 等厚板の座屈応力

(b)に示すように節線の生じない板の固有角振動数を $\omega(0, 0, \alpha)$ とすれば,

$$\omega^*(0, l-1, \alpha) = \omega(0, 0, \alpha) \quad (18)$$

従って, 図4-(a)の座屈の固有値を $N_y^*(0, l-1, \alpha)$, 図4-(b)の固有値を $N_y(0, 0, \alpha)$ とすれば, 式(17), (18)より,

$$N_y^*(0, l-1, \alpha) = N_y(0, 0, \alpha) \quad (19)$$

すなわち, $N_y(0, 0, \alpha)$ のみを考えておけば, その値より $N_y(0, l-1, \alpha)$ を求めることができる。また, 図5に示す座屈応力線図より明らかなように,

$$0.5 < \frac{b}{a} < 0.9 \sim 1.4 \quad (20)$$

の範囲内の $N_y(0, 0, \alpha)$ のみを考えれば良い。

さて, 文献⁴⁾によれば,

$$\omega(0, 0, \alpha) = \omega(0, 0, \alpha=0) \cdot \eta(\alpha, \frac{a}{b}) \quad (21)$$

ただし,

$$\eta(\alpha, \frac{a}{b}) = 1 + (0.3 + \beta_1)\alpha - \beta_0 \{1 - (0.2 + 0.03 \frac{a}{b})\alpha\} \alpha^2 \quad (22)$$

また, β_0 および β_1 は a/b および板の境界条件によって決められる定数である。

$\eta(\alpha, a/b)$ の値を式(20)の範囲内で計算した結果を表1に示す。 $\eta(\alpha, a/b)$ の値は近似的に次式で表わされる。

表1 $\eta(\alpha, \frac{a}{b})$ の値

境界条件	$\frac{b/a}{\alpha}$	1.0/2.0	1.0/1.5	1.0	1.5
図2-(a)	0.6	1.280	1.288	1.292	1.290
	1.0	1.454	1.470	1.480	1.475
図2-(b)	0.6	1.299	1.296	1.275	
	1.0	1.483	1.482	1.450	
図2-(c)	0.6	1.281	1.284	1.284	
	1.0	1.455	1.461	1.462	
図2-(d)	0.6	1.265	1.277	1.301	
	1.0	1.429	1.451	1.493	

$$\eta(\alpha, \frac{a}{b}) \approx 1 + 0.46\alpha \quad (23)$$

従って,

$$N_y(0, 0, \alpha) = \rho \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \cdot \omega(0, 0, \alpha=0)^2 \cdot (1 + 0.46\alpha)^2 \approx N_y(0, 0, \alpha=0) \cdot (1 + 0.46\alpha)^2 \quad (24)$$

式(19)および(24)より

$$N_{ycr}(\alpha) \approx N_{ycr}(\alpha=0) \cdot (1 + 0.46\alpha)^2 \quad (25)$$

が成立する。 $N_{ycr}(\alpha=0)$ の値は図5に示す通りであり, 板厚が変化するときには, 補正係数 $(1 + 0.46\alpha)^2$ を乗ずれば良い。

4. 計算例

四辺支持された不等厚板の座屈荷重 $N_{ycr}(\alpha)$ を近似式

(25)より求め, その精度を検討する。ただし, $\alpha=1.0$, $b/a=2.0$ とする。

まず, 文献⁴⁾の方法で正しい値を求めると,

$$\omega(0, 0, \alpha=1.0) = 18.10 \sqrt{D_0 / \rho h_0 a^4}$$

$$\omega(0, 1, \alpha=1.0) = 29.21 \sqrt{D_0 / \rho h_0 a^4}$$

式(17)より,

$$N_y(0, 0, \alpha=1.0) = 13.45 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2}$$

$$N_y(0, 1, \alpha=1.0) = 8.76 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2}$$

従って, 座屈応力は,

$$N_{ycr}(\alpha=1.0) = 8.76 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2}$$

と求まる。

表2 四辺支持された板の座屈応力

$\frac{b}{a}$	$\frac{N_{ycr}(\alpha=0)}{\pi^2 D_0 / h_0 a^2}$	$N_{ycr}(\alpha=1.0) / (\pi^2 D_0 / h_0 a^2)$	
		式(25)より	式(17)より
1.0/2.0	6.25	13.32	13.22
1.0/1.5	4.70	10.02	10.15
1.0	4.00	8.53	8.76
1.5	4.70	10.02	10.22
2.0	6.25	13.32	13.45

(式)25より求める場合には次のようになる。 $b/a=2.0$ のときには図5より,

$$N_{ycr}(\alpha=0) = 4.0 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2}$$

従って, 式(25)より,

$$N_{ycr}(\alpha=1.0) = 4.0 \times 1.46^2 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2} = 8.53 \frac{\pi^2 D_0}{h_0 a^2}$$

と求められる。誤差は約2.6%である。

さらに, b/a を変化させて計算した結果を表2に示す。誤差は全て3%以下である。

5. 結 論

文献⁴⁾で報告した固有角振動数の近似式を利用して, 対向する二辺支持された不等厚矩形板の支持辺に圧縮力が作用する場合の座屈応力を簡単に計算する近似式を導いた。さらに, 数値計算例により座屈応力の求め方および近似式の精度を示した。

参考文献

- 1) W.H. Wittrick and C.H. Ellen, Aeron. Quarterly, 13-4 (1962), 308.
- 2) T.M. Wang and J.M. Sussman, AIAA Journal, 5-7(1967) 1362.
- 3) T. Sakata, Proceedings of the 22nd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1972, 22(1974), 329.
- 4) 坂田, 中部工大紀要, 10-A(1974), 1.