

板厚が一方方向に直線的に変化する矩形板の固有角振動数の簡易計算法

——対向辺が支持され、他の辺が固定または支持された板

坂 田 敏 行*

An Approach for the Determination of the Eigenvalues of Rectangular Plates with Thickness Varying Linearly in One Direction

——Plates with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Edges Clamped or Simply Supported

Toshiyuki SAKATA*

(Received September 13, 1974)

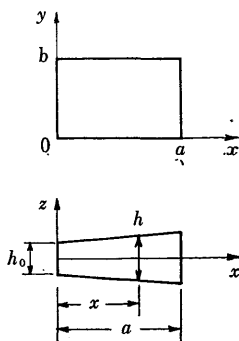
Since nodal lines can be considered as simply supported edges even for non-uniform thickness plates, the fundamental eigenvalue of a rectangular plate which is made by cutting a rectangular plate along the nodal lines, coincides with the higher eigenvalue of the latter.

An approximate formula for the fundamental eigenvalue of the non-uniform thickness plate is introduced. Numerical examples apparently show that the approximate formula simplifies considerably the evaluation of the higher eigenvalues of the non-uniform thickness plate.

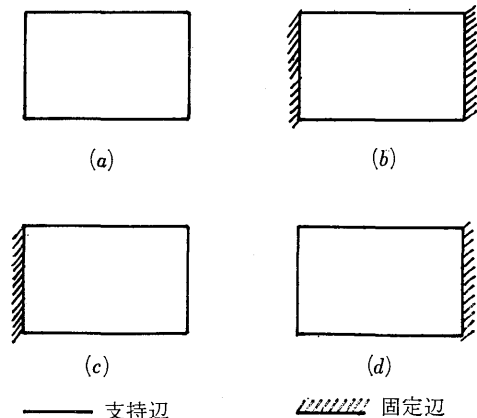
1. 緒 言

一般形状の不等厚板の固有角振動数を厳密に求めることは不可能であり、有限要素法^{1,2)}、フーリエ級数法^{3,}

⁴⁾などにより近似計算が行なわれている。本論文で対象とする板(第1図にその形状を、第2図にその境界条件を示す。)に一般的な方法を適用して固有角振動数を求めることも可能であるが、そのためには相当の労力及び時間を必要とする。そこで、板の形状及び境界条件に応じてそれぞれに適



第1図 板の形状



第2図 板の境界条件

*機械・生産機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

した方法を工夫して固有角振動数を計算するのが普通である。第2図一(a)に示す板については次のような研究が報告されている。F. C. Appl 等は基本固有角振動数の上限, 下限を計算した。⁵⁾ Gumeniuk は基本固有角振動数の近似式を finite-difference 法を用いて導いた。⁶⁾ この方法は固有角振動数の近似式を陽な形で求めた注目すべき方法であるが, 計算式が極めて複雑であり, しかも後述するように誤差が大きい。著者は基本及び3次までの高次固有角振動数の近似式を導き⁴⁾, さらに高次固有振動の節線に注目することにより基本固有角振動数を用いて高次固有角振動数を求め得ることを明らかにした。⁷⁾ F. C. Appl 等の方法, Gumeniuk の方法では高次固有角振動数を求めることは不可能であり, 文献⁷⁾の方法はこの点で秀れている。第2図一(b)~(d)に示す境界条件を有する板の基本固有角振動数は Gontkevich によって求められた。⁸⁾ その方法は Gumeniuk の方法を応用したものである。本論文では, 文献⁷⁾の方法を第2図一(b)~(d)に示す板に適用し, 基本固有角振動数のみならず高次固有角振動数をも精度良く推定し得ることを明らかにする。

尚, 本論文で使用する主な記号は以下の通りである。

a, b	矩形板の辺の長さ
D_i	板の曲げ剛さ $= Eh_i^3/12(1-\nu^2)$
E	板の縦弾性係数
h, h_i	板厚
w	板のたわみ振幅
$ w_{max} $	$ w $ の最大値
x, y	板の中立面上に考えた矩形板の二辺に平行な座標軸
z	x, y 軸に垂直な座標軸
α, α_i	板厚変化の程度を示す定数
β_0, β_1	定数
ν	ポアッソン比
ρ	板の密度
σ_x^0	x 方向の表皮応力
$ \sigma_x^0_{max} $	$ \sigma_x^0 $ の最大値
$\omega_{i,j,a}$	固有角振動数, 添字 i, j はそれぞれ y, x 軸に平行な節線の数

2. 基本固有角振動数の近似式

解析する板(第1図)の任意の位置 (x, y) における板厚 h は次式で表わされる。

$$h = h_0 \left(1 + \frac{\alpha}{a} x \right) \quad (1)$$

大きさ a, b 及び境界条件が同じで, α のみが変わる板について考える。 $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ および 1.0 のときの基本固有角振動数 $\omega_{0,0,a}$ を求め, 文献⁷⁾

と同様のデータ処理を行なった結果, 固定辺を有する場合にも次式が近似的に成立することが明らかになった。

$$\frac{\omega_{0,0,a}}{\omega_{0,0,a=0}} = 1 + (0.3 + \beta_1) \alpha - \beta_0 \{ 1 - (0.2 + 0.03 \frac{a}{b}) \alpha \} \alpha^2 \quad (2)$$

ただし, β_0, β_1 は二辺の比 a/b 及び境界条件により定まる定数であり, 第3, 4図にその値を示す。第4図の三本の曲線は互いに独立ではなく, 曲線(c), (d)の平均値が曲線(a) (曲線(b)と同一であるが)に一致する。近似式(2)を用いて計算した結果の一例を第1表に示す。表中フーリエ級数法とあるのは文献⁷⁾で詳述した計算法であり, その精度は 0.1% 以下である。この表より, 近似式(2)により極めて精度の高い値を得られることが明らかである。 a/b の値が 0.1 から 10 の間ではほぼ同様の結果が得られた。次に, 第3, 4図の読み取り誤差により $\omega_{0,0,a}$ の値にどの程度の誤差が生ずるかを第2表に示す。 β_0, β_1 をそれぞれ単独に $\pm 10\%$ 変化させた。その結果, $\omega_{0,0,a}$ にはそれぞれ $0 \sim 0.3\%$, $0 \sim 1.5\%$ 程度の誤差が生じることが明らかになった。第3, 4図より明らかなように, 10% の読み取り誤差が生ずることは考えられず, 最悪の場合でも, $\omega_{0,0,a}$ に及ぼす読み取り誤差の影響は 0.5% 程度であると考えられる。比較のために Gontkevich の式⁸⁾を用いて計算した結果を次に述べる。第2図一(b) ($a = b$) では $\alpha = 0$ のとき $\omega_{0,0,a=0} = 26.02 \sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$, $\alpha = 1$ のとき $\omega_{0,0,a=1} = 33.11 \sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ となった。又, 第2図一(c)の板 ($a = b$) では $\alpha = 0$ のとき $\omega_{0,0,a=0} = 22.16 \sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ となった。第1表の値とこれらの値を比較してみれば明らかな如く, $\alpha = 0$ のときには約 10% , $\alpha = 1$ の時には約 20% の誤差を含み実用には供し得ない式である。

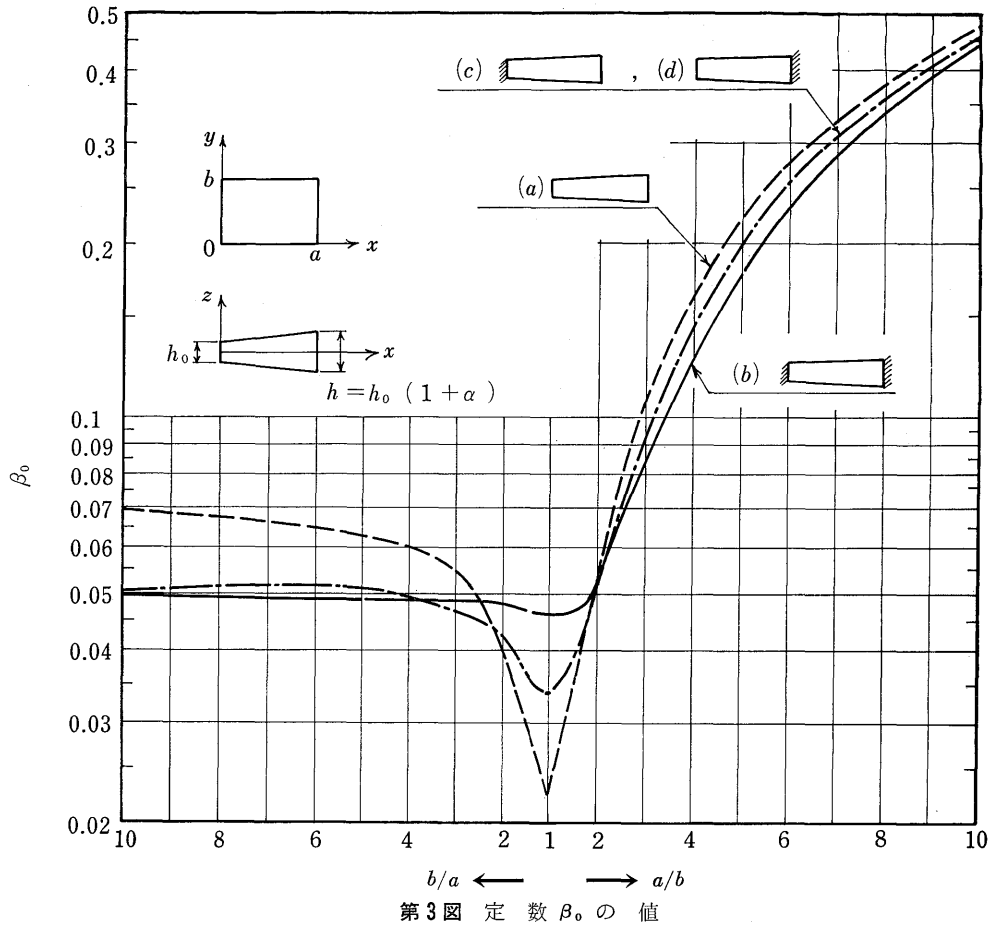
尚, 式(2)を用いて $\omega_{0,0,a}$ を求めるときには, $\omega_{0,0,a=0}$ の値が必要であり, $\omega_{0,0,a=0}$ に含まれる誤差はそのまま $\omega_{0,0,a}$ に含まれる。そのため, $\omega_{0,0,a=0}$ の値を高精度に求める必要がある。この値は Warburton の式⁹⁾を用いても計算し得るが, より高精度には附1図を用いて求めることができる(求め方は附録参照)。

以上の結果より, 本論文で提案した方法により第2図に示す板の基本固有角振動数を誤差 1% 以下で求め得ると思えられる。

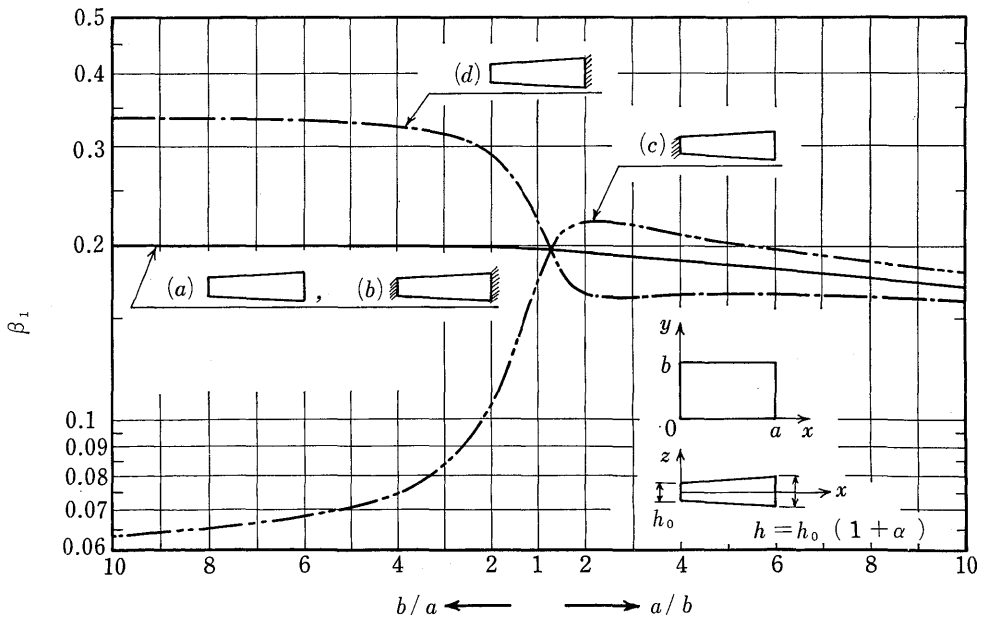
3. 高次固有振動の節線に関する考察

文献⁷⁾では, 四辺支持不等厚矩形板(第2図一(a))の高次固有振動の節線は近似的に単純支持辺と見做し得ることを明らかにした。固定辺を含む場合にも同様の結論が得られるか否かを検討する。

3.1 固有振動に関する考察 第5図は二辺固定二辺支



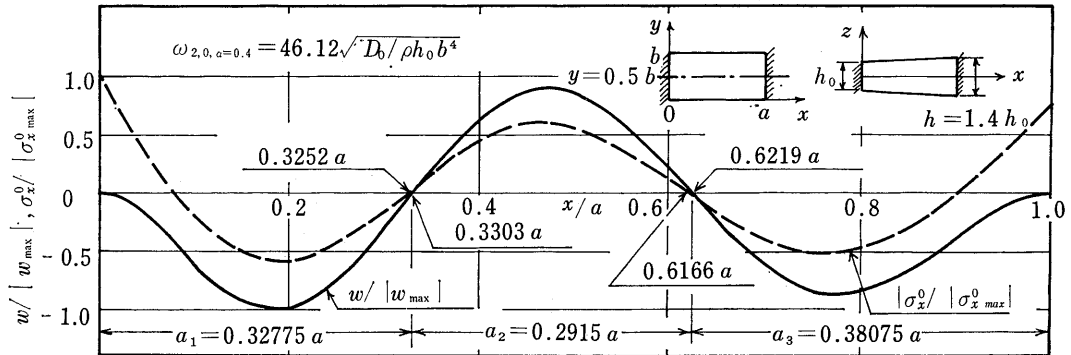
第3図 定数 β_0 の値



第4図 定数 β_1 の値

第1表 $\omega_{0,0,\alpha}/\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ の精度 ($a=b$)

境界条件	第2図—(b)		第2図—(c)		第2図—(d)	
α	フーリエ級数法	近似式(2)	フーリエ級数法	近似式(2)	フーリエ級数法	近似式(2)
0	28.95	28.95	23.65	23.65	23.65	23.65
0.2	31.79	31.78	25.87	25.87	26.08	26.07
0.4	34.52	34.51	28.04	28.03	28.45	28.44
0.6	37.18	37.17	30.16	30.15	30.77	30.76
0.8	39.77	39.76	32.23	32.23	33.05	33.05
1.0	42.31	42.31	34.28	34.28	35.30	35.30
β_0	0.04612		0.03372		0.03372	
β_1	0.1970		0.1754		0.2186	

第5図 高次固有振動形の例 ($a=2b$, $\alpha=0.4$)第2表 β_0, β_1 の誤差が固有角振動数 $\omega_{0,0,\alpha}/\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ に及ぼす影響 (境界条件は第2図—(b), $a=b$)

β_0	0.04151	0.05073	0.04612	0.04612	フーリエ
β_1	0.1970	0.1970	0.1773	0.2167	級数法
α	0	28.95	28.95	28.95	28.95
0.2	31.78	31.77	31.66	31.89	31.79
0.4	34.53	34.49	34.28	34.74	34.52
0.6	37.21	37.13	36.83	37.51	37.18
0.8	39.83	39.69	39.31	40.22	39.77
1.0	42.41	42.21	41.74	42.88	42.31

持された矩形板 ($a=2b$, $\alpha=0.4$) の高次固有振動 ($\omega_{2,0,\alpha=0.4}=46.12\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$) のたわみ振幅 w , 表皮応力振幅 σ_x^0 を示したものである ($y=0.5b$)。 $w=0$, $\sigma_x^0=0$ となる点 (y 方向の広がりを考えれば直線であるが) は極めて接近しており、近似的には一致すると見做し得る。そこで、 $w=0$, $\sigma_x^0=0$ となる位置の中央を節線と考えれば (すなわち、図に示したごとく固定端から $a_1=0.32775a$ および $a_3=0.38075a$ の位置に節線があると考えれば)、節線において近似的に $w=0$, $\sigma_x^0=0$ が成立し、節線は単純支持辺と見做し得る。

3.2 固有角振動数に関する考察 節線の位置で矩形板を3ヶに分割し、分割辺を単純支持辺と考えそれぞれの板の基本固有角振動数を求め、 $\omega_{2,0,\alpha=0.4}$ との関係を検討する。すなわち、第6図—(a)の板を第6図—(b), (c)及び(d)の如く分割する。第6図—(a)の h_1 , h_2 及び h_3 を求めると、式(1)より、

$$h_1 = h_0 \left(1 + \frac{\alpha}{a} a_1\right) \quad (3)$$

$$h_2 = h_0 \left\{1 + \frac{\alpha}{a} (a_1 + a_2)\right\} \quad (4)$$

$$h_3 = h_0 (1 + \alpha) \quad (5)$$

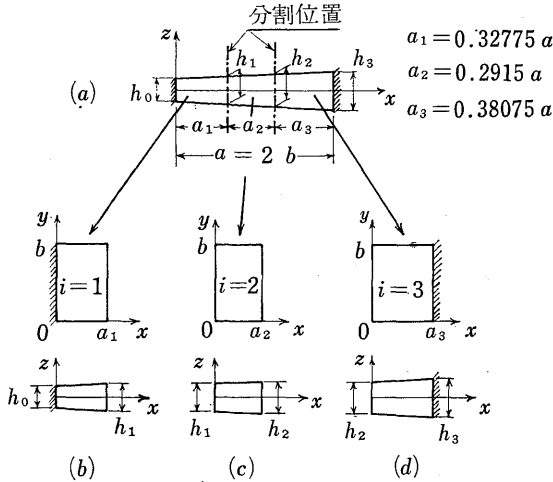
又、第6図—(b), (c) 及び(d)における α を α_1 , α_2 及び α_3 とそれぞれ定義すれば、

$$h_i = h_{i-1} (1 + \alpha_i) \quad (6)$$

ただし、 $i=1, 2, 3$

式(3)~(6)より、 $\alpha_1=0.1311$, $\alpha_2=0.1031$ および $\alpha_3=0.1221$ と求まる。

第6図—(b)の基本固有角振動数 $\omega_{0,0,\alpha=\alpha_1}$ を求める。第3, 4図の横軸 b/a は第6図—(b)の場合には $b/a_1=0.5/0.32775$ に等しい。 $b/a=1.53$ の時には、第3, 4図より $\beta_0=0.037$, $\beta_1=0.13$ と読み取れる。式(2)に代入すれば、

第6図 板の分割位置($a=2b$, $\alpha=0.4$)

$$\frac{\omega_{0,0,a=a_1}=1.0558}{\omega_{0,0,a=0}} \quad (7)$$

次に、附1図を用いて $\omega_{0,0,a=0}$ を求める。附1図の横軸 c_2/b は第6図—(b)の場合には $a_1/b=0.32775/0.5$ に等しい。そこで、直線 $c_2/b=0.6555$ と附1図の曲線との交点の縦座標の値を読み取れば約0.0495と求められる。ところで、縦軸は $0.9c_2/b - c_1/b$ である。

$$\text{ゆえに、} 0.9 \frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{b} = 0.0495$$

より $c_1/b=0.54045$ と求められる。この値を式(附1)に代入すれば、

$$\omega_{0,0,a=0}=43.660\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \quad (8)$$

式(7), (8)より、

$$\omega_{0,0,a=a_1}=46.10\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \quad (9)$$

同様にして、第6図—(c)の基本固有角振動数 $\omega_{0,0,a=a_2}$ を求める。第3, 4図において $b/a=1.7153$ ($\therefore b/a_2=0.5/0.2915$) のときには、 $\beta_0=0.034$, $\beta_1=0.2-0.003a/b=0.1983$ と求められる。したがって、

$$\frac{\omega_{0,0,a=a_2}=1.0510}{\omega_{0,0,a=0}} \quad (10)$$

二辺の比 $b/c_1=1.7153(=b/a_2)$ なる四辺支持矩形板の基本固有角振動数 $\omega_{0,0,a=0}$ は式(附1)より、

$$\begin{aligned} \omega_{0,0,a=0} &= 38.908\sqrt{D_1/\rho h_1 b^4} \\ &= 44.009\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \end{aligned} \quad (11)$$

式(10), (11)より、

$$\omega_{0,0,a=a_2}=46.25\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \quad (12)$$

第6図—(d)の基本固有角振動数 $\omega_{0,0,a=a_3}$ を同様を求める。 $\beta_0=0.035$, $\beta_1=0.25$ を式(2)に代入すると、

$$\frac{\omega_{0,0,a=a_3}=1.0666}{\omega_{0,0,a=0}} \quad (13)$$

附1図において、 $c_2/b=0.7615$ より $c_1/b=0.6333$ とな

る。従って、

$$\begin{aligned} \omega_{0,0,a=0} &= 34.474\sqrt{D_2/\rho h_2 b^4} \\ &= 43.086\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \end{aligned} \quad (14)$$

式(13), (14)より、

$$\omega_{0,0,a=a_3}=45.96\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \quad (15)$$

式(9), (12)及び(15)の値より明らかなように、それぞれの基本固有角振動数はほぼ同一の値となり、それらの平均値 $46.10\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ は $\omega_{2,0,a=0.4}=46.12\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ と良く一致している。他の条件の場合もほぼ同様の結論が得られた。

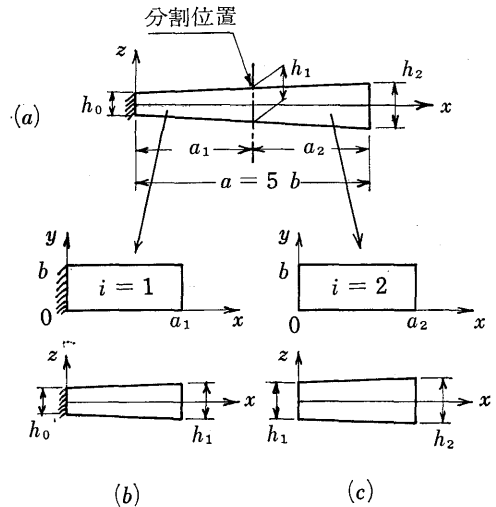
3.1及び3.2の考察より、文献⁷⁾の場合と同じく、第6図—(b)~(d)の場合にも近似的に次の結論が成立する。

- 1) 固有振動の節線は単純支持辺と同一の作用をする。
- 2) 高次固有角振動数はその節線を単純支持辺とする板の基本固有角振動数と一致する。

以上の結論より、図2に示した各種境界条件を有する矩形板の高次固有角振動数を式(2)を用いて簡単に推定することが可能である。

4. 高次固有角振動数の推定法

前章で明らかにした節線の性質を利用して、図2に示す不等厚板の高次固有角振動数を精度良く求め得ること

第7図 板の分割位置($a=5b$, $\alpha=0.6$)

を例題により説明する。

〔例題〕一辺固定三辺支持矩形板(第2図—(c), $a=5b$, $\alpha=0.6$)の $\omega_{1,0,a=0.6}$ を求める。

第7図—(a)に示す板を節線的位置で分割し、同図(b), (c)に示す2枚の矩形板を作る。前章の結論1), 2)によれば、第7図—(b), (c)の基本固有角振動数が等しくなり、その値が求める $\omega_{1,0,a=0.6}$ に一致する。そこで、節線的位置を適当に仮定し、試行的にその値を修正し、条件

が満足されるように a_1, a_2 を決定すればよい。まず最初に, $a_1=2.5b, a_2=2.5b$ と仮定してそれぞれの基本固有角振動数 $\omega_{0,0,a=ai}$ を求める。その求め方は前章で述べた通りであるので, 結果のみを示す。

板の番号	i	1	2
a_i を仮定する	a_i	$2.5b$	$2.5b$
式(1)より	h_i	$1.3h_0$	$1.6h_0$
番号 i の板の α	α_i	0.3	0.2308
第3図より	β_0	0.07	0.08
第4図より	β_1	0.22	0.1925
式(2)より	$\frac{\omega_{0,0,a=ai}}{\omega_{0,0,a=0}}$	1.1565	1.1097
式(附1)より	$\frac{\omega_{0,0,a=0}}{\sqrt{D_i/\rho h_i b^4}}$	11.750	11.449
したがって	$\frac{\omega_{0,0,a=ai}}{\sqrt{D_i/\rho h_i b^4}}$	13.59	12.705
単位を変更して	$\frac{\omega_{0,0,a=ai}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}$	13.59	16.52

この計算結果では $\omega_{0,0,a=a_1}$ と $\omega_{0,0,a=a_2}$ との差が大きい。 a_1, a_2 を順次変化させて計算した結果を第3表に示す。第3回目の計算により $a_1=2.0b$ と $a_1=1.8b$ との間で $\omega_{0,0,a=a_1}=\omega_{0,0,a=a_2}$ となることが明らかになり, 第4回目の計算で $a_1=1.9b$ と $1.8b$ の間であることが明らかになった。第6回目までの計算で $a_1=1.83b$ と $1.82b$ の間で $\omega_{0,0,a=a_1}=\omega_{0,0,a=a_2}$ が成立することが明らかになった。又, 第5, 6回の場合には $\omega_{0,0,a=a_1}$ と $\omega_{0,0,a=a_2}$ との差は約0.2%となったので計算を打ち切った。 $\omega_{0,0,a=a_1}$ と $\omega_{0,0,a=a_2}$ の平均値を $\omega_{1,0,a=0.6}$ と考えれば $\omega_{1,0,a=0.6}=15.11\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ と求められる。フーリエ級数法により求めた値は $15.13\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ であり誤差約0.13%である。このように, $\omega_{0,0,a=a_1}$ と $\omega_{0,0,a=a_2}$ の平均を $\omega_{0,0,a=0.6}$ と考えるならば, 試行回数を余り多くする必要がない。

第3表 高次固有角振動数の計算結果

回 数	1	2	3	4	5	6
a_1/b	2.5	2.0	1.8	1.9	1.83	1.82
a_2/b	2.5	3.0	3.2	3.1	3.17	3.18
$\frac{\omega_{0,0,a=a_1}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}$	13.59	14.50	15.22	14.82	15.09	15.13
$\frac{\omega_{0,0,a=a_2}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}$	16.52	15.42	15.07	15.25	15.12	15.10
$\frac{\omega_{0,0,a=a_1}-\omega_{0,0,a=a_2}}{\omega_{0,0,a=a_1}}$	-0.216	-0.063	0.010	-0.029	-0.002	0.002
$\frac{\omega_{1,0,a=0.6}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}$	15.06	14.96	15.15	15.04	15.11	15.12
$\left(=\frac{\omega_{0,0,a=a_1}+\omega_{0,0,a=a_2}}{2\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}\right)$						
$\omega_{1,0,a=0.6}$ の誤差(%)	0.46	1.12	-0.13	0.59	0.13	0.07

5. 結 論

板厚が一方に直線的に変化する矩形板の固有振動を考察し次の結論を得た。

- 1) 基本固有角振動数は板厚変化を表わすパラメータの四次式により精度良く近似される。
- 2) 高次固有振動の節線は近似的に単純支持辺と等価な作用をしている。したがって, 高次固有角振動数はその固有振動の節線を単純支持辺とする矩形板の基本固有角振動数と近似的に一致する。

さらに, 1), 2)の結果を応用して高次固有角振動数を精度良く, しかも簡単に推定することが可能であることを明らかにした。

尚, 本研究は昭和49年度中部工業大学特別研究費の援助を受けて行なわれたことを記し, 関係各位に謝意を表す。

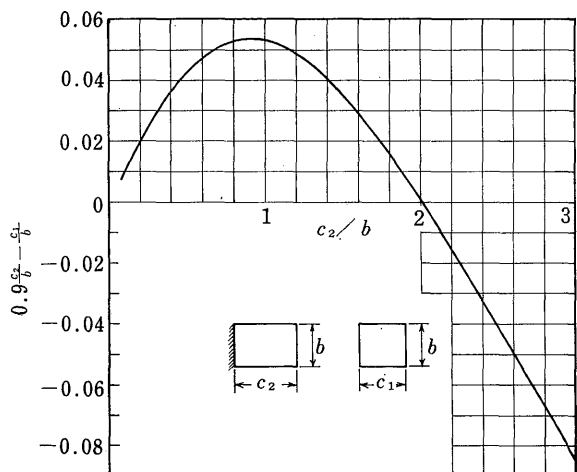
文 献

- 1) P. Paramasivam 他, Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press. 11(1969), 885.
- 2) 長松他, 日本機械学会講演論文集, No. 723-4(1972), 67.
- 3) 坂田, 日本機械学会講演論文集, No. 724-8(1972), 76.
- 4) T. Sakata, Proc. of the 22nd Japan National Congr. for Appl. Mech., 1972(1974), 329.
- 5) F. C. Appl 他, Trans. ASME, E, 32-1(1965), 163.
- 6) Gumeniuk, V. S., Dopov. AN Ukr SSR, No. 2 (1956) 130-133.

- 7) 坂田, 中部工大紀要, 9-A(1973), 13.
 8) Gontkevich, V. S., "Natural Vibrations of Plates and Shells.", A. P. Filippov, ed., Nauk. Dumka (Kiev), 1964.
 9) Warburton, G. B., Proc. Jour. Mech. Engrs., 168-12(1954), 371.
 10) 坂田, 日本機械学会論文集, 41-344 (昭50-4) 掲載予定

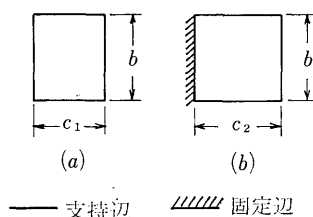
附 録

附1図を用いて一边固定三辺支持等厚矩形板の基本固有角振動数を求める方法を簡単に説明する。附2図に示



附1図 同一の基本固有角振動数を有する時の c_2/b と c_1/b との関係 (文献¹⁰⁾より引用)

す2ヶの矩形板の曲げ剛さを D_0 , 密度を ρ , 板厚を h_0 .
 とし, 基本固有角振動数をそれぞれ ω_1^* (附2図-(a)),



附2図 板の形状及び境界条件

ω_2^* (附2図-(b)) とする。 $\omega_1^* = \omega_2^*$ のとき, c_1/b と c_2/b の関係を表わすと附1図が得られる。¹⁰⁾ 例えば, $c_2/b = 1$ の時の ω_2^* を求めるためには次のようにすれば良い。直線 $c_2/b = 1$ と附1図の曲線との交点の縦座標を求めると,

$$0.9 \frac{c_2}{b} - \frac{c_1}{b} = 0.054$$

$c_2/b = 1$ であるから, $c_1/b = 0.846$ となる。

従って, $c_1/b = 0.846$ の時の ω_1^* を求めれば, その値が ω_2^* である。 ω_1^* は四辺支持矩形板の基本固有角振動数であるから, その厳密値は,

$$\omega_1^* = \left\{ \left(\frac{b}{c_1} \right)^2 + 1 \right\} \pi^2 \sqrt{D_0 / \rho h_0 b^4} \quad (\text{附1})$$

で与えられる。 $c_1/b = 0.846$ のときには,

$$\omega_1^* = 23.66 \sqrt{D_0 / \rho h_0 b^4}$$

と求められる。従って, $\omega_2^* = 23.66 \sqrt{D_0 / \rho h_0 b^4}$ である。

ω_2^* の正しい値は, $\omega_2^* = 23.65 \sqrt{D_0 / \rho h_0 b^4}$ であり, 附1図を用いて精度の良い値が求められることが明らかである。