

板厚が一方方向に直線的に変化する四辺支持矩形板の 固有角振動数の簡易計算法

坂 田 敏 行*

A Simple Method to Determine the Eigenvalues of Simply Supported Rectangular Plates with the Thickness Varying Linearly in One Direction

Toshiyuki SAKATA

(Received August 23, 1973)

The following results for the plate with uniform thickness were obtained previously.

- a) A nodal line can be considered as a simply supported side.
- b) The fundamental eigenvalues of simply supported rectangular plates which are made by cutting a rectangular plate along the nodal lines, coincide with the higher eigenvalue of the latter.

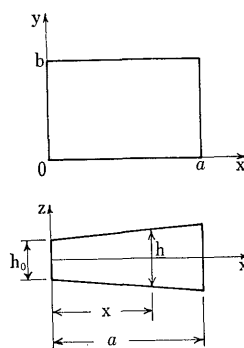
In this paper, the same results are obtained for the simply supported plate with the thickness which varies linearly in one direction and an approximate formula for the fundamental eigenvalue of the plate is introduced.

This consideration simplifies considerably the evaluation of the higher eigenvalues of the plate.

1. 緒 言

等厚薄板の振動の基礎式は定数係数の偏微分方程式であるため、固有角振動数の厳密解が得られない場合にも精度の良い近似値を求める方法が多数報告されている。それらは板の固有モードを仮定する方法としない方法に大別される。一方、不等厚矩形板の振動の基礎式は変数係数の偏微分方程式になるため、その固有モードを簡単な関数により近似することは一般に不可能に近く、固有角振動数の近似計算法としては固有モードを仮定する必要のない方法が用いられている。例えば有限要素法^{1,2)}フーリエ級数法^{3,4)}及び F.C. Appl 等の方法⁵⁾等である。これらの方法をその特長及び用途に応じて用いれば、高次固有角振動数を求めることは可能である。しかし、その計算には多くの時間と労力を必要とする場合が

多い。著者は先にこの労力と時間を節約するための一方法として板厚が一方方向にのみ変化し、対向する二辺支持された矩形板の固有角振動数の近似式を発表した^{3,4)}。この近似式は未定定数を4ケ含み、その値を決定するために少なからぬ計算量を必要とした。本論文では四辺支持矩形板(第1図)の基本



第1図 板の形状

固有角振動数は1ケの未定定数のみを含む簡単な式により精度良く近似されることを明らかにし、未定定数を求めるためのグラフを報告する。他方等厚矩形板の高次固有モードを検討した際、自由振動の節線は近似的に単純支持辺と同一の作用を

*機械・生産機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

していることを明らかにし^{6,7,8)}、対向する二辺支持された矩形板の高次固有角振動数を基本固有角振動数より簡単に求める方法を提案した^{7,8)}。ここでは文献^{7,8)}と同様にして第1図に示す四辺支持不等厚矩形板の固有モードの節線は近似的に単純支持辺と等価な作用をしていることを示し、高次固有角振動数の推定法を述べる。

2. 計算方法*

不等厚板の基礎式は次式により表わされる⁵⁾。

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \\ + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho h \omega^2 w = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 w ：板のわみ

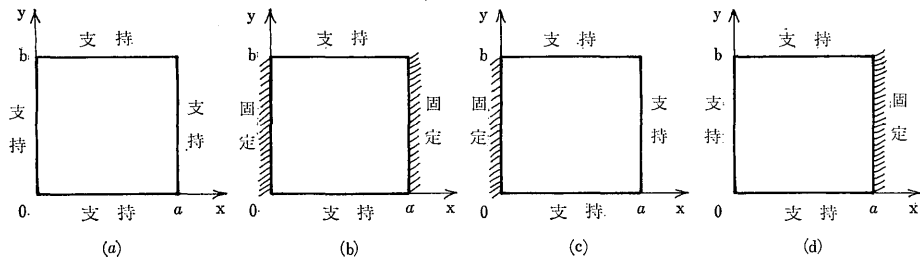
h ：板厚

ρ ：板の密度

ω ：角振動数

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} : \text{曲げ剛さ}$$

$\nu=0.3$ ：ポアソン比， E ：ヤング率



第2図 板の境界条件

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & (\text{第2図-a}) \\ &= x^2 - ax & (\text{第2図-b}) \\ &= x^2 - 2ax & (\text{第2図-c}) \\ &= x^2 - a^2 & (\text{第2図-d}) \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)を式(3)に代入し、整理すれば、

$$\sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^K w_{kl} \left\{ E_{kl}^{(1)} - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 E_{kl}^{(2)} \right\} \right] \sin \frac{l\pi}{b} y = 0 \quad (6)$$

ただし、 $E_{kl}^{(i)}$ ($i=1, 2$) は x のみの関数

関数 $E_{kl}^{(i)}$ をフーリエ級数に展開する。

$$E_{kl}^{(i)} = \sum_{m=1}^K B_{kl}^{ml(i)} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

$$\text{ただし、} B_{kl}^{ml(i)} = \frac{2}{a} \int_0^a E_{kl}^{(i)} \sin \frac{m\pi}{a} x dx \quad (8)$$

式(6), (7)より、

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^K \left[\sum_{k=1}^K w_{kl} \left\{ B_{kl}^{ml(1)} - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 B_{kl}^{ml(2)} \right\} \right]$$

x, y ：板の中立面上の直交座標軸

本論文では第1図に示す x 方向にのみ板厚の変化する矩形板を解析する。そこで、板厚 h を式(2)で表わす。

$$h = h_0 \left(1 + \frac{\alpha}{a} x \right) \quad (2)$$

ただし、 h_0 ： $x=0$ の時の板厚， α ：定数

今、 $e = h/h_0$ とすれば、式(1)は式(3)となる。

$$\begin{aligned} e^3 \nabla^4 w + 2 \frac{de^3}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ + \frac{d^2 e^3}{dx^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 e w = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ただし、} D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

たわみ w として次式を仮定する。

$$w = f(x) \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L w_{kl} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \quad (4)$$

ただし、 w_{kl} は定数、 $f(x)$ は w が板の境界条件を満足するように決定される任意関数である。その例を示すと、

$$\times \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y = 0 \quad (9)$$

式(9)は x, y についての恒等式であり、連立一次方程式(10)が得られる。

$$\sum_{k=1}^K w_{kl} \left[B_{kl}^{ml(1)} - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 B_{kl}^{ml(2)} \right] = 0 \quad (10)$$

ただし、 $m=1, 2, 3, \dots, K$

$l=1, 2, 3, \dots, L$

連立一次方程式(10)が零以外の解を持つ条件より振動数方程式が得られるが、 K が大きい場合には固有角振動数を精度良く求めることは困難である。そこで、式(10)のかわりに式(11)を用いて解 w_{kl} を求める。

$$\sum_{k=1}^K w_{kl} \left[B_{kl}^{ml(1)} - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 B_{kl}^{ml(2)} \right] = 1 \quad (11)$$

ただし、 $m=1, 2, 3, \dots, K$

$l=1, 2, 3, \dots, L$

* 文献^{8,4)}では極めて簡単に述べてある。ここではくわしく説明する。

得られる w_{kl} は角振動数 ω の関数である。そこで、 w_{kl} が無限大の（すなわち、極めて大きくなる）時の ω を固有角振動数とした。

3. 計算精度

ここでは矩形板の固有角振動数を $\omega_{ij\alpha}$ で表す。添字 i, j はそれぞれ y, x 軸に平行な節線の数を表わし、 α は板厚変化の程度を示す定数で式(2)により定義された値である。正方形板の基本固有角振動数 $\omega_{00\alpha}$ の収束性を第1表に示す。この表より、項数 K を増加させれば $\omega_{00\alpha}$ は一定値に収束すること、および $\alpha=0.0$ （すなわち、等

第1表 基本固有角振動数 $\omega_{00\alpha}/\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ の収束性 ($a=b$)

境界条件	図2— a	図2 — b		図2 — c	
$K \backslash \alpha$	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
10	29.208	28.836	42.002	23.594	34.046
20	29.208	28.920	42.233	23.632	34.216
30	29.208	28.937	42.279	23.640	34.250
40	29.208	28.943	42.296	23.643	34.262
50	29.208	28.946	42.303	23.644	34.269
厳密値	—	28.951	—	23.646	—

第2表 基本固有角振動数の比較（四辺支持正方形板）

	$\frac{\omega_{00\alpha=0.8}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 a^4}}$		$\frac{\omega_{00\alpha=0.8}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}}$	
b/a	4	2	1	1/2
フーリエ級数法	14.33	17.00	27.36	16.88
Appl等の方法	14.34	16.99	27.35	16.88

厚板) のときにはその一定値が厳密値であることがわかる。第2表は4辺支持不等厚板の計算結果を F.C. Appl 等の値と比較した結果であり、等厚板のときのみならず不等厚板のときにも正解に収束することが明らかになった。多くの計算結果によれば、高次固有角振動数の収束性および精度もほぼ同様であり、項数 K を50以上（四辺支持の場合には20以上）にとれば誤差0.1%以下の値を求め得ることが明らかになった。

4. 基本固有角振動数の近似式

2章で述べた方法により精度の高い値を求め得ることが明らかになったが、その値を計算するためにはかなりの労力と時間を必要とする。そこで、 a/b を一定とした時、 $\omega_{00\alpha}$ を α の多項式(12)により近似することを試みた。

$$\frac{\omega_{00\alpha}}{\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}} = \sum_{n=1}^N r_n \alpha^{n-1} \quad (12)$$

ただし、 r_n は定数、

$\omega_{00\alpha=0}$, $\omega_{00\alpha=0.2}$, $\omega_{00\alpha=0.4}$, $\omega_{00\alpha=0.6}$, $\omega_{00\alpha=0.8}$, $\omega_{00\alpha=1.0}$ を用いて最小自乗法により係数 r_n を決定し、その係数を用いて $\omega_{00\alpha}$ の近似値を計算した結果、 $N \leq 5$ の条件のもとでは $N=4$ のとき最良の近似式が得られた。四辺支持正方形板の場合の r_n の値及び式(12)の精度を第3表に示す。次に第4表に示すように、 a/b の値を変化して求めた係数 r_n を詳細に検討した結果、 $r_2/r_1 \div$

第3表 近似式(12)の精度（四辺支持正方形板）

α	フーリエ級数法	近似式(12)
0.0	19.74	19.74
0.2	21.69	21.69
0.4	23.61	23.61
0.6	25.50	25.50
0.8	27.36	23.37
1.0	29.21	29.21
式(12)の係数	r_1	19.740
	r_2	9.857
	r_3	-0.496
	r_4	0.112

第4表 近似式(12)の係数（四辺支持矩形板）

a/b	1	5	1/5
r_1	19.740	10.260	10.263
r_2	9.857	5.119	4.971
r_2/r_1	0.499	0.499	0.484
r_3	-0.496	-0.646	-2.302
r_4	0.112	0.137	0.834
r_4/r_3	-0.226	-0.212	-0.362

0.5, $r_4/r_3 \div -0.2$ なる関係が明らかになった。そこで、更に多くの計算結果を考慮して式(13)を導いた。

$$\frac{\omega_{00\alpha}}{\omega_{00\alpha=0}} = 1 + (0.5 - 0.003 \frac{a}{b}) \alpha - \beta_0 \left\{ 1 - \left(0.2 + 0.03 \frac{a}{b} \right) \alpha \right\} \alpha^2 \quad (13)$$

$$\text{ただし、} \omega_{00\alpha=0} = \pi^2 \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \sqrt{D_0/\rho h_0 b^4} \quad (14)$$

β_0 : 定数

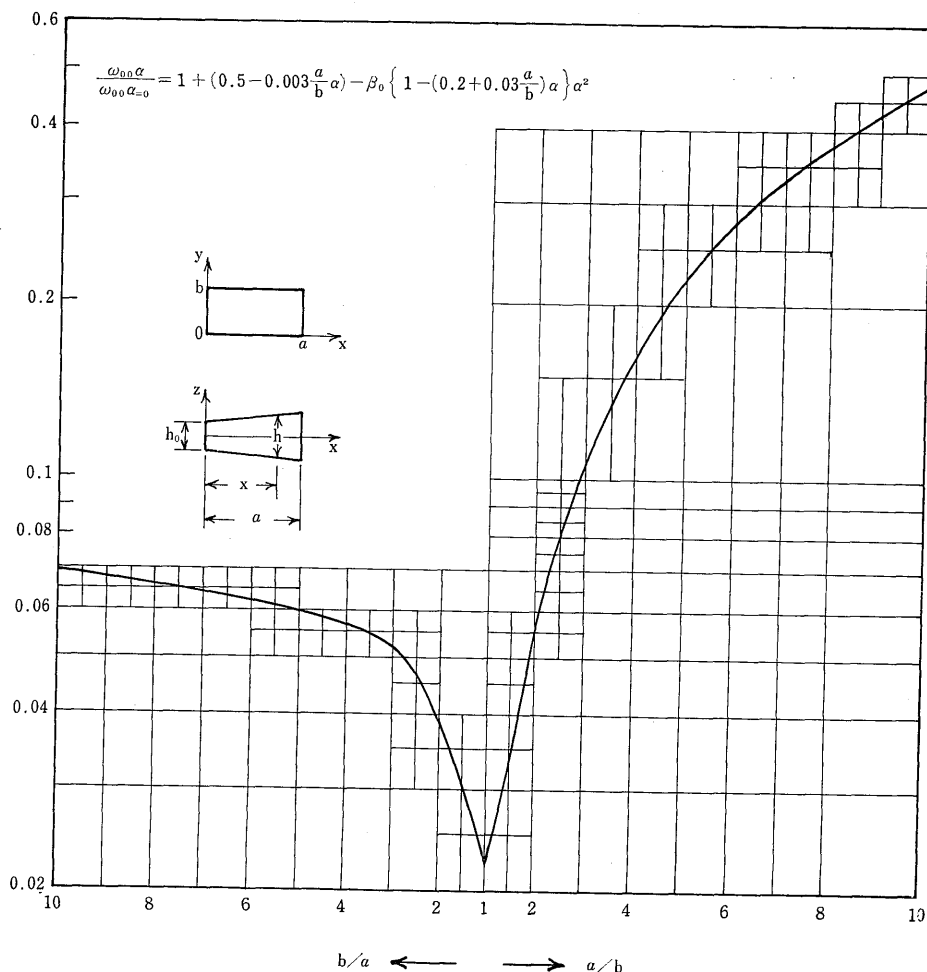
式(13)は未定定数 β_0 を含んだ式であり、 $\omega_{00\alpha}$ の値をただ1個求めることにより β_0 を決定することが出来る。本論文では式(15)より β_0 を決定した。

$$\beta_0 = \frac{1.5 - 0.003 \frac{a}{b} - \frac{\omega_{00\alpha=1}}{\omega_{00\alpha=0}}}{0.8 - 0.03 \frac{a}{b}} \quad (15)$$

従って、近似式(13)の誤差は $\alpha=0, 1.0$ では0である。 $0 < \alpha < 1.0$ の誤差の例を第5表に示す。近似式(13)の誤差は最大0.3%以内であることが明らかになった。 β_0 の値を

第5表 近似式(13)の精度 (四辺支持矩形板)

a/b	$\omega_{00}\alpha/\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$				$\omega_{00}\alpha/\sqrt{D_0/\rho h_0 a^4}$	
	1		5		1/5	
α	フーリエ級数法	近似式(13)	フーリエ級数法	近似式(13)	フーリエ級数法	近似式(13)
0.0	19.74	19.74	10.26	10.26	10.26	10.26
0.2	21.69	21.69	11.18	11.17	11.26	11.26
0.4	23.61	23.60	11.93	11.94	12.21	12.21
0.6	25.50	25.49	12.59	12.60	13.13	13.13
0.8	27.36	27.38	13.20	13.19	14.01	14.01
1.0	29.21	29.21	13.76	13.76	14.87	14.87

第3図 未定定数 β_0 の値 (四辺支持矩形板)

第3図に示す。

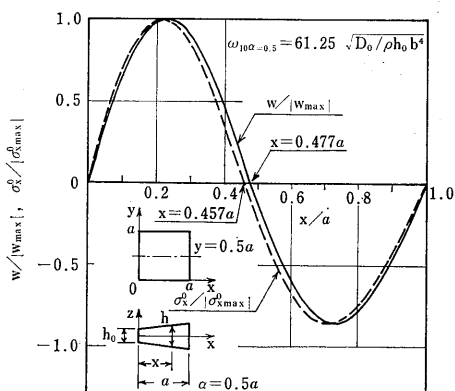
5. 高次固有振動についての考察

第1図に示す四辺支持矩形板の高次固有振動について

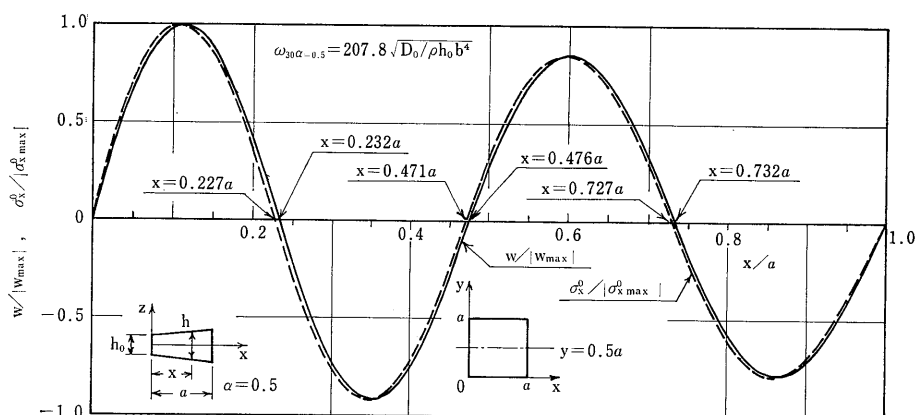
$$*\sigma_x^0 = \left| \frac{6}{h_0^2} D_0 e \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right|$$

考察する。 $\alpha=0.5$, $a=b$ とする。固有角振動数 $\omega_{10}\alpha = 0.5 = 61.25\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ のため w, x 方向の表皮応力 σ_x^0* を第4図に示す。この図より, $w=0$, $\sigma_x^0=0$ なる位置は極めて接近しており近似的に同一の位置と見做し得ることが明らかになった。次に, この正方形板を y 軸

に平行な直線により分割して得られる2枚の矩形板をいづれも四辺支持矩形板と考え、それぞれの基本固有角振動数 $\omega_{00}\alpha$ を求め両方の値がほぼ等しくなる分割線的位置を探した結果、 $x=0.468a$ の位置で分割すれば良いことが明らかになった。この時、左側の板の基本固有角振動数 $\omega_{00}\alpha=0.284=61.23\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ 、右側の板では $\omega_{00}\alpha=0.216=61.07\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ となった(分割して得られた板の α はもとの板の α と異なる)。これらの値は分割前の板の $\omega_{10}\alpha=0.5$ とほぼ一致している。更に $w=0$, $\sigma_x^0=0$ の位置の平均値 $x=0.467a$ は分割線的位置 $x=0.468a$ とほぼ一致した。より高次の振動の例を第5図に示す。この図の固有角振動数は $\omega_{30}\alpha=0.5=207.8\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ である。第4図の場合と同様に y 軸に平行な3本の直線($x=0.230a$, $x=0.473a$ および $x=0.730a$)により正方形板を分割して得られた4枚の四辺支持矩形板の基本固有角振動数を左側の板から示すと $\omega_{00}\alpha=0.115=207.6$



第4図 直線 $y=0.5a$ 上の w , σ_x^0 の値(四辺支持正方形板の固有モード)。 w_{max} , $\sigma_{x_{max}}^0$ はそれぞれ w , σ_x^0 の最大値



第5図 直線 $y=0.5a$ 上の w , σ_x^0 の値(四辺支持正方形板の固有モード)

$\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$, $\omega_{00}\alpha=0.109=208.0\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$, $\omega_{00}\alpha=0.104=207.1\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$, $\omega_{00}\alpha=0.099=207.9$

$\sqrt{D_0/\rho h_0 b^4}$ となり、分割前の正方形板の $\omega_{30}\alpha=0.5$ とほぼ一致した。又、第5図の $w=0$, $\sigma_x^0=0$ の平均値と前述の分割線的位置ともほぼ一致した。 $w=0$, $\sigma_x^0=0$ の位置は極めて接近しているのでその平均値の位置を節線と考えれば(通常 $w=0$ の位置を節線と呼ぶが) 前述の結果より次の2点が成立する。

- 1) 固有モードの節線は近似的に単純支持辺と同一の作用をする。
- 2) 高次固有角振動数は節線を単純支持辺とする矩形板の基本固有角振動数と近似的に一致する。

6. 高次固有角振動数の推定法

前章で明らかにした節線の性質を利用して第1図に示

す四辺支持された不等厚矩形板の高次固有角振動数を推定する方法を例題により説明する。

〔例題〕 $a=2b$, $\alpha=0.5$ なる矩形板の $\omega_{10}\alpha=0.5$, $\omega_{20}\alpha=0.5$, $\omega_{30}\alpha=0.5$ を求める。

a) $\omega_{10}\alpha=0.5$ 第6図に示すように解析する板を節線的位置 $x=a_1$ で2枚に分割する。 a_1 の大きさは不明であるが近似的に適当な値を仮定して試行的に求めれば良い。

板の番号	i	1	2
a_i を仮定する。	a_i	$0.8b$	$1.2b$
式(2)より,	h_i	$1.2h_0$	$1.5h_0$
番号 i の板の α	α_i	0.2	0.25
図3より, 番号 i の板の β_0	β_{0i}	0.026	0.026
式(14)より,	$\frac{\omega_{00}\alpha=0}{\sqrt{D_{i-1}/\rho h_{i-1} b^4}}$	25.291	16.723

$$\text{式(13)より, } \frac{\omega_{00\alpha=\alpha_i}}{\sqrt{D_{i-1}/\rho h_{i-1}b^4}} \quad 27.78 \quad 18.77$$

$$\text{単位を変更して, } \frac{\omega_{00\alpha=\alpha_i}}{\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}} \quad 27.78 \quad 22.53$$

$$\text{ただし, } D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}$$

$\omega_{00\alpha=\alpha_1}$ と $\omega_{00\alpha=\alpha_2}$ との値の差は大きすぎるので, $a_1=0.9b$, $a_2=1.1b$ として同様に計算した。その結果, $\omega_{00\alpha=\alpha_1}=24.50\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}$, $\omega_{00\alpha=\alpha_2}=24.52\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}$ と良く一致した。従って, 求める矩形板の固有角振動数 $\omega_{10\alpha=0.5}=24.51\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}$ と考えられる。2章で述べたフーリエ級数法により求められた値は $\omega_{10\alpha=0.5}=24.53\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}$ であり, その誤差は -0.08% である。

b) $\omega_{20\alpha=0.5}$ 節線の本数は2本であり3ケの矩形板に分割して考えれば良い。最終結果を示す。

i	1	2	3
a_i	$0.605b$	$0.66b$	$0.735b$
α_i	0.1513	0.1433	0.1396
β_{0i}	0.033	0.030	0.028

$$\frac{\omega_{00\alpha=\alpha_i}}{\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}} \quad 39.57 \quad 40.08 \quad 39.58$$

$$\frac{\omega_{20\alpha=0.5}}{\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}} \begin{cases} =39.74 \text{ (3ケの平均値)} \\ =39.79 \text{ (フーリエ級数法)} \end{cases}$$

$$\text{誤 差} \quad -0.13\%$$

c) $\omega_{30\alpha=0.5}$ 最終結果のみを示す。

i	1	2	3	4
a_i	$0.45b$	$0.48b$	$0.52b$	$0.55b$
α_i	0.1125	0.1079	0.1055	0.1009
β_{0i}	0.043	0.040	0.037	0.036

$$\frac{\omega_{00\alpha=\alpha_i}}{\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}} \quad 61.83 \quad 61.73 \quad 60.11 \quad 60.77$$

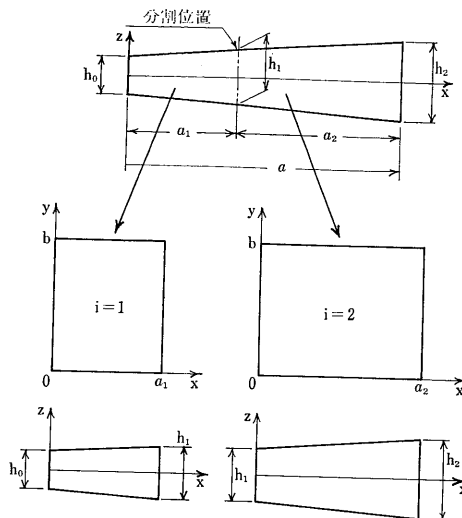
$$\frac{\omega_{30\alpha=0.5}}{\sqrt{D_0/\rho h_0b^4}} \begin{cases} =61.11 \text{ (4ケの平均値)} \\ =61.15 \text{ (フーリエ級数法)} \end{cases}$$

$$\text{誤 差} \quad -0.08\%$$

〔例題2〕 $a=0.1b$, $\alpha=0.6$ なる矩形板の $\omega_{13\alpha=0.6}$ を求める。

式(10)より w_{kl}/w_{1l} を求め, 式(4)に代入すれば明らかであるが, x 軸に平行な節線は常に等間隔になり, しかもその節線上で常に $w=0$, y 方向の表皮応力 $\sigma_{y0}=0$ が成立する。従って, 5章1), 2)と同様の事が y 方向についても成立し, 求める $\omega_{13\alpha=0.6}$ は $b=2.5a$, $\alpha=0.6$ なる板の $\omega_{10\alpha=0.6}$ と一致する。そこで〔例題1〕と同様にして $\omega_{10\alpha=0.6}$ を求める。

$$*\sigma_{y0} = \left| \frac{6}{h_0^2} D_0 \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right|$$



第6図 板の分割方法

i	1	2
a_i	$0.19b$	$0.21b$
α_i	0.285	0.2451
β_{0i}	0.060	0.059
$\frac{\omega_{00\alpha=\alpha_i}}{\sqrt{D_0/\rho h_0a^4}}$	51.57	53.76
$\frac{\omega_{10\alpha=0.6}}{\sqrt{D_0/\rho h_0a^4}}$	52.67 (2ケの平均値)	
$\frac{\omega_{13\alpha=0.6}}{\sqrt{D_0/\rho h_0a^4}}$	$\begin{cases} =52.67 \\ =52.83 \text{ (フーリエ級数法)} \end{cases}$	
誤 差	-0.30%	

以上の例題より明らかなように, 第3図及び式(13), (14)を用いて誤差 0.5% 以内の固有角振動数を求めることができる。F.C. Appl等の求めた基本固有角振動数の誤差が 0.5% 以内であり, しかも計算範囲が $0.25 \leq a/b \leq 4.0$, $0 \leq \alpha \leq 0.8$ の基本固有角振動数のみであることを考慮すれば本方法の有用性を理解することができるであろう。

7. 結 論

- 1) 板厚が一方方向にのみ直線的に変化し, 対向する二辺支持された四辺支持矩形板の基本固有角振動数を求める近似式を導いた。
- 2) 高次固有モードの節線は近似的に単純支持辺と等価な作用をしていること, および高次固有角振動数はその固有モードの節線を単純支持辺とする矩形板の基本固有角振動数と近似的に一致することを明らかにした。
- 3) 1), 2)の結果を応用して高次高次固有角振動数を 0.5% 以内の誤差で簡単に推定する方法を例題により説明した。

文 献

- 1) P. Paramasivam 他, Int. J. Mech. Sci. Pergamon Prss, 11 (1969), 885.
- 2) 長松他, 日本機械学会講演論文集, No. 723—4 (1972), 67.
- 3) 坂田, 日本機械学会講演論文集, No. 724—8 (1972), 76.
- 4) 坂田, 第22回応力連合講演論文集, (1972), 225.
- 5) F.C Appl 他, Trans. ASME, E, 32—1 (1965), 163.
- 6) 坂田, 日本機械学会講演論文集, No. 730—3 (1973), 91.
- 7) 坂田, 日本機械学会講演論文集, No.773—2 (1973), 21.
- 8) 坂田, 日本機械学会講演論文集, No. 730—14 (1973), 73.