

# Galois 拡大の埋めこみ問題と $n$ -invariant number

白 井 進\*

## On the Imbedding Problem and $n$ -Invariant Number of Galois Extensions

Susumu SHIRAI\*

(Received September 1, 1971)

The purpose of this paper is to give a cohomological formulation of Brauer's theorem on the imbedding problem for a Galois extension  $K/k$  and to determine the group of  $n$ -invariant numbers in case the Galois group of  $K/k$  is cyclic. Moreover, with this results, the imbedding problem for a unramified  $\ell$ -extension of algebraic number fields is considered.

### 1. $n$ -invariant number

$k$  を標数 0 の体,  $K/k$  を有限次 Galois 拡大とし, 以後断わらない限り  $K$  は常に 1 の原始  $n$  乗根  $\zeta$  を含むものとする.  $K^*$  の元  $\mu$  が  $\mathbf{g} = \text{Gal}(K/k)$  のすべての元  $\sigma$  に対して

$$\mu^\sigma \equiv \mu \pmod{K^{*n}}$$

を満足するとき,  $k$  上の  $n$ -invariant number であるという. これは I.R. Šafarevič<sup>4)</sup> における  $\ell$ -invariant number の自然な拡張である.  $k$  上の  $n$ -invariant number 全体のなす群を  $K_n^*$  で示す.

補題 1.  $H^1(\mathbf{g}, K^{*n}) \cong K_n^*/k^*K^{*n}$ .

証明.  $K_n^*$  の元  $\mu$  に対して  $f_\mu(\sigma) = \mu^\sigma/\mu$  とおけば, Hilbert-Speiser の定理により対応  $\mu \rightarrow f_\mu$  が同型を誘導する. (証明終り)

次に  $K_\mu = K(\sqrt[n]{\mu})$  ( $\mu \in K_n^*$ ) とおけば,  $K_\mu/k$  が Galois 拡大になることは容易に示される.  $\mathbf{g}$  の元  $\sigma$  の  $\mathbf{h} = \text{Gal}(K_\mu/K)$  への作用を

$$z^\sigma = \bar{\sigma}^{-1} z \bar{\sigma} \quad (z \in \mathbf{h})$$

によって定義する. ここに  $\bar{\sigma}$  は  $\sigma$  の  $K_\mu$  への延長の 1 つを示す. さらに

$$\sqrt[n]{\mu}^z = \chi_\mu(z) \sqrt[n]{\mu}$$

によって  $\mathbf{h}$  の指標  $\chi_\mu$  を決める.  $\mu$  は  $n$ -invariant number なので, この  $\chi_\mu$  は 1 の  $n$  乗根の全体のなす群  $\Omega$  の中への  $\mathbf{h}$  の  $\mathbf{g}$ -同型写像である. すなわち

$$\chi_\mu(z^\sigma) = \chi_\mu(z)^\sigma$$

が成り立つ. 従って特に  $k$  が  $\zeta$  を含むときには,  $K_\mu/k$  は  $K/k$  の central extension になる.

さて群拡大

$$\text{Gal}(K_\mu/k)/\text{Gal}(K_\mu/K) \cong \mathbf{g}$$

の因子団は  $\chi_\mu$  により  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  の cohomology 類を定めるから, この類を  $\rho(\mu)$  によって示す;

$$\rho(\mu) = \{ \chi_\mu(\sigma_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) \} \quad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{g}).$$

ここに  $\{ \}$  は cohomology 類を示すものとする.

補題 2.  $\rho$  は  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  の中への  $K_n^*$  の準同型写像である.

証明.  $\mathbf{g}$  の元  $\sigma$  の  $L = K(\sqrt[n]{\mu}, \sqrt[n]{\mu'})$  への延長の 1 つを  $\bar{\sigma}$  で示すとき,  $\sqrt[n]{\mu \mu'} = \sqrt[n]{\mu} \sqrt[n]{\mu'} \zeta^a$  と書けるから

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\mu \mu'}^{\sigma_1 \bar{\sigma}_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} &= \sqrt[n]{\mu}^{\sigma_1 \bar{\sigma}_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} \sqrt[n]{\mu'}^{\sigma_1 \bar{\sigma}_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} \zeta^a \\ &= \sqrt[n]{\mu}^{\sigma_1 \bar{\sigma}_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} \sqrt[n]{\mu'}^{\sigma_1 \bar{\sigma}_1 \sigma_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} \zeta^a. \end{aligned}$$

従って  $\bar{\sigma}$  の  $K_\mu$  への制限を  $\text{Res}_{L/K_\mu} \bar{\sigma}$  で示すと,

$$\begin{aligned} \chi_{\mu \mu'}(\text{Res}_{L/K_\mu} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) \\ = \chi_\mu(\text{Res}_{L/K_\mu} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) \\ \cdot \chi_{\mu'}(\text{Res}_{L/K_\mu} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2). \end{aligned}$$

(証明終り)

次に完全系列

$$1 \longrightarrow \Omega \xrightarrow{i} K^* \xrightarrow{j} K^{*n} \longrightarrow 1$$

から cohomology 群にうつると, Hilbert-Speiser の定理により完全系列

$$1 \longrightarrow H^1(\mathbf{g}, K^{*n}) \xrightarrow{\delta_*} H^2(\mathbf{g}, \Omega) \xrightarrow{i_*} H^2(\mathbf{g}, K^*)$$

が得られる. 補題 1 の準同型写像  $K_n^* \rightarrow H^1(\mathbf{g}, K^{*n})$  を  $\lambda$  によって示すと,

\*本学自然科学系—数学 (Department of Liberal Arts and Sciences—Mathematics)

補題 3. 図形

$$\begin{array}{ccc} & K_n^* & \\ \lambda \swarrow & & \searrow \rho \\ H^1(\mathbf{g}, K_n^*) & \xrightarrow{\delta_*} & H^2(\mathbf{g}, \Omega) \end{array}$$

は可換である。従って補題 1 により

$$1 \longrightarrow K_n^*/k^*K_n^* \xrightarrow{\rho_*} H^2(\mathbf{g}, \Omega) \xrightarrow{i_*} H^2(\mathbf{g}, K^*)$$

は完全系列をなす。ここに  $\rho_*$  は  $\rho$  から自然に誘導された準同型写像である。証明.  $\mu$  を  $K_n^*$  の任意の元とすると  $\lambda(\mu) = \{f_\mu\}$  である。ただし  $f_\mu(\sigma) = \mu^\sigma / \mu$ .  $\mu^\sigma / \mu = g(\sigma)^n (g(\sigma) \in K^*)$  とおくと

$$g(\sigma) = \sqrt[n]{\mu} \bar{\sigma} / \sqrt[n]{\mu} \zeta(\sigma) \quad (\zeta(\sigma) \in \Omega)$$

と書けるから

$$\begin{aligned} (\partial g)(\sigma_1, \sigma_2) &= g(\sigma_2)g(\sigma_1\sigma_2)^{-1}g(\sigma_1)^{\sigma_2} \\ &= \chi_u(\sigma_1\sigma_2)^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \zeta(\sigma_2) \zeta(\sigma_1\sigma_2)^{-1} \zeta(\sigma_1)^{\sigma_2}. \end{aligned}$$

従って  $\delta_*$  の定義から

$$\delta_*\{f_\mu\} = \{\chi_u(\sigma_1\sigma_2)^{-1} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2\} = \rho(\mu).$$

(証明終り)

## 2. Brauer の定理

埋めこみ問題  $P = P(K/k, \{f\})$  ( $\{f\} \in H^2(\mathbf{g}, \Omega)$ ) の解とは因子団  $f$  に対応する  $\Omega$  の  $\mathbf{g}$  による群拡大を  $\mathbf{G}$  とするとき、図形

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(L/k) & \longrightarrow & \mathbf{g} \\ \phi \downarrow & & \downarrow 1 \\ \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{g} \end{array}$$

が可換となるような Galois 拡大  $L/k$  と同型写像  $\phi$  のことである。 $P$  の reduction とは、形

$$P_0 = P(K/k, \{f_0\}) \quad (\{f_0\} \in H^2(\mathbf{g}, \Omega_0))$$

の問題である。ここに  $\Omega_0$  は  $\Omega$  の部分群であり、 $\{f_0\}$  は  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\{f\} = \{f_0\}$  となるものである。補題 4.  $P$  の reduction  $P_0 = P(K/k, \{f_0\})$  が解  $(L/k, \phi)$  を持つならば、 $L$  は  $K$  上  $n$ -invariant number  $\mu$  の  $n$  乗根によって生成される。そして  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\rho(\mu) = \{f_0\}$  が成り立つ。証明.  $[L:K] = d$ ,  $cd = n$  とおくと  $L/K$  は Kummer 体だから  $L = K(\sqrt[n]{\omega}) = K(\sqrt[n]{\omega^c})$  となる  $K^*$  の元  $\omega$  が存在する。 $\phi|_{\text{Gal}(L/K)} = \phi_0$  とおくと、 $\phi_0$  は  $\Omega_0$  の上への  $\text{Gal}(L/K)$  の  $\mathbf{g}$ -同型写像である。従って  $\text{Gal}(L/K)$  の生成元の 1 つを  $z_0$  とすると、 $\phi_0(z_0)$  と  $\chi_{\omega^c}(z_0)$  はともに 1 の原始  $d$  乗根であるから

$$\phi_0(z_0) = \chi_{\omega^c}(z_0)^r \quad (r, d) = 1$$

となる有理整数  $r$  が存在する。 $\omega^{rc} = \mu$  とおくこれが求めるものである。まず

$$L = K(\sqrt[n]{\omega}) = K(\sqrt[n]{\omega^r}) = K(\sqrt[n]{\omega^{rc}}) = K(\sqrt[n]{\mu}).$$

次に  $\chi_{\omega^c}(z_0)^r = \chi_{\omega^{cr}}(z_0)$  は容易に示されるから、 $\phi_0 =$  $\chi_u$  が成り立つ。従って  $\chi_u$  は  $\Omega_0$  の上への  $\text{Gal}(L/K)$  の  $\mathbf{g}$ -同型写像であるから、 $\mathbf{g}$  の元  $\sigma$  の  $L$  への延長の 1 つを  $\bar{\sigma}$  で示すと、 $\text{Gal}(L/K)$  の任意の元  $z$  に対して

$$\chi_u \sigma(\bar{\sigma}^{-1} z \bar{\sigma}) = \chi_u(z)^\sigma = \chi_u(\bar{\sigma}^{-1} z \bar{\sigma}).$$

ゆえに

$$\left( \frac{\sqrt[n]{\mu}^\sigma}{\sqrt[n]{\mu}} \right)^{\bar{\sigma}^{-1} z \bar{\sigma}} = \frac{\sqrt[n]{\mu}^\sigma}{\sqrt[n]{\mu}}$$

従って

$$\sqrt[n]{\mu}^\sigma / \sqrt[n]{\mu} \in K^*.$$

このことは  $\mu$  が  $k$  上の  $n$ -invariant number であることを示している。 $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\rho(\mu) = \{f_0\}$  なることは今や明らかである。(証明終り)埋めこみ問題  $P$  のある reduction が解をもつとき、 $P$  は solvable reduction をもつという。補題 3 と補題 4 により次の定理を得る。それは埋めこみ問題に関する Brauer の定理<sup>1)</sup> の cohomology 的定式化である。定理 5. (Brauer) 埋めこみ問題  $P(K/k, \{f\})$  ( $\{f\} \in H^2(\mathbf{g}, \Omega)$ ) が solvable reduction を持つための必要十分条件は、 $H^2(\mathbf{g}, K^*)$  において  $\{f\} = 1$  となることである。系. とくに  $K/k$  が  $\ell$ -拡大で  $\Omega$  が 1 の  $\ell$  乗根よりなる群の場合には、 $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\{f\} \neq 1$  ならば、 $P(K/k, \{f\})$  が解をもつための必要十分条件は、 $H^2(\mathbf{g}, K^*)$  において  $\{f\} = 1$  となることである。ここに  $\ell$  は素数を示す。3.  $K/k$  が巡回拡大の場合  $K_n^*/k^*K_n^*$  の構造定理 6.  $K/k$  が巡回拡大ならば

$$K_n^*/k^*K_n^* \cong_{\rho^*} \left( K_n^*/k^*K_n^* \right) \cong \frac{\Omega \cap N_{K/k} K^*}{N_{K/k} \Omega}$$

が成り立つ。

証明.  $\mathbf{g} = \text{Gal}(K/k)$  は巡回群であるから

$$H^2(\mathbf{g}, \Omega) \cong_{\psi} \frac{\Omega \cap k^*}{N_{K/k} \Omega}$$

が成り立つ。ここに  $\psi$  は、 $\mathbf{g}$  の生成元の 1 つを  $\tau$  とするとき、cohomology 類  $\{f\}$  に

$$(1) \quad \prod_{i=0}^{m-1} f(\tau^i, \tau) \bmod N_{K/k} \Omega$$

を対応させる同型写像である。ただし  $m$  は  $\mathbf{g}$  の位数である。さて  $K_n^*$  の任意の元  $\mu$  に対して  $\mu^c / \mu = x^n$  ( $x \in K^*$ ) とおくと、 $N_{K/k} x$  は  $\Omega \cap N_{K/k} K^*$  に属し、 $\rho_*(\mu \bmod k^*K_n^*) = \{\chi_u\}$  である。今  $\tau$  の  $K_\mu = K(\sqrt[n]{\mu})$  への延長の 1 つを  $\bar{\tau}$  とすると、 $\bar{\tau}^i$  は  $\tau^i$  の延長の 1 つであるから、これを  $\bar{\tau}^i$  にとると

$$\chi_u(\bar{\tau}^{i+1})^{-1} \bar{\tau}^{i+1} = \begin{cases} 1 & (i < m-1) \\ \chi_u(\bar{\tau}^m) & (i = m-1) \end{cases}$$

である。 $x = \sqrt[n]{\mu} \cdot \sqrt[n]{\mu} \cdot \zeta^a$  と書けるから

$$N_{K/k} x = \sqrt[n]{\mu} \cdot \sqrt[n]{\mu} \cdot N_{K/k} \zeta^a = \chi_u(\zeta^m) N_{K/k} \zeta^a$$

ゆえに  $\chi_u(\zeta^m) = N_{K/k} x \cdot N_{K/k} \zeta^{-a}$ , 従って(1)式により

$$\psi \circ \rho_*(\mu \bmod k^* K^{*n})$$

$$= N_{K/k} x \bmod N_{K/k} \Omega \in \Omega \cap N_{K/k} K^* / N_{K/k} \Omega$$

が成り立つことがわかる。逆に  $\Omega \cap N_{K/k} K^* / N_{K/k} \Omega$  の任意の元  $N_{K/k} x \bmod N_{K/k} \Omega$  をとると,  $N_{K/k} x^n = 1$  であるから, Hilbert 90により  $\mu^n / \mu = x^n$  となる  $K^*$  の元  $\mu$  が存在する。明らかにこの  $\mu$  は  $n$ -invariant number であり,  $\psi \circ \rho_*(\mu \bmod k^* K^{*n}) = N_{K/k} x \bmod N_{K/k} \Omega$  が成り立つ。(証明終り)

この定理により

$$\begin{aligned} H^2(\mathbf{g}, \Omega) / \rho_* \left( K_n^* / k^* K^{*n} \right) &\cong \Omega \cap k^* / \Omega \cap N_{K/k} K^* \\ &\cong (\Omega \cap k^*) N_{K/k} K^* / N_{K/k} K^* \end{aligned}$$

を得る。そこで  $k$  を局所数体,  $U$  をその単数群,  $T$  を  $K/k$  の惰性体とすると, 局所類体論により

$N_{T/k} T^* = U N_{K/k} K^* \supset (\Omega \cap k^*) N_{K/k} K^* \supset N_{K/k} K^*$  であるから, 次の系が従う。

系.  $k$  が局所数体で,  $K/k$  が巡回拡大ならば, 指数

$$[H^2(\mathbf{g}, \Omega) : \rho_*(K_n^* / k^* K^{*n})]$$

は  $K/k$  の分岐指数の約数である。

系.  $K/k$  が局所不分岐拡大ならば

$$H^2(\mathbf{g}, \Omega) = \rho_*(K_n^* / k^* K^{*n}).$$

#### 4. $K/k$ が代数体の不分岐拡大の場合

$k$  を代数体,  $K/k$  を Galois 拡大とし,  $\mathbf{g} = \text{Gal}(K/k)$  とする。 $k$  の素因子  $p$  の上にある  $K$  の素因子  $P$  を 1 つずつ定めておき,  $\mathbf{g}_P$  を  $P$  の分解群であるとする。 $\mathbf{g}_P$  は局所 Galois 拡大  $K_P/k_P$  の Galois 群とみなされる。

さて図形

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbf{g}, \Omega) & \xrightarrow{i_*} & H^2(\mathbf{g}, K^*) \\ \text{Res}_{\mathbf{g}/\mathbf{g}_P} \downarrow & i_{P*} & \downarrow \pi_{P*} \circ \text{Res}_{\mathbf{g}/\mathbf{g}_P} \\ H^2(\mathbf{g}_P, \Omega) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{g}_P, K_P^*) \end{array}$$

は可換である。ここに  $\pi_P$  は自然な単準同型  $K^* \rightarrow K_P^*$  であり,  $i_P$  は  $i$  に対応する単準同型  $\Omega \rightarrow K_P^*$  である。類体論により

$$H^2(\mathbf{g}, K^*) \longrightarrow \sum_p H^2(\mathbf{g}_P, K_P^*) \quad (\text{直和})$$

は単準同型であるから, もしすべての  $P(\supset p)$  に対し

$$i_{P*} \text{Res}_{\mathbf{g}/\mathbf{g}_P} \{f\} = 1 \quad (\{f\} \in H^2(\mathbf{g}, \Omega))$$

ならば,  $i_* \{f\} = 1$ , すなわち  $H^2(\mathbf{g}, K^*)$  において  $\{f\}$

$= 1$  が従う。これは Richter<sup>3)</sup> の Satz 1 の cohomology 化である。よって定理 5 および定理 6 の系により次の定理が従う。

定理 7.  $k$  を代数体,  $K/k$  を不分岐 Galois 拡大とし,  $K$  は 1 の  $n$  乗根の群  $\Omega$  を含むものとする。 $n$  が偶数のときには, さらに  $k$  の実無限素因子は  $K$  において不分岐であるとする。そのとき任意の埋めこみ問題

$$P(K/k, \{f\}) \quad (\{f\} \in H^2(\mathbf{g}, \Omega))$$

はつねに solvable reduction をもつ。

この定理により,  $K/k$  が不分岐  $\ell$ -拡大で,  $K$  従って  $k$  が 1 の  $\ell$  乗根の群  $\Omega$  を含むとき,  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\{f\} \neq 1$  ならば, 埋めこみ問題  $P(K/k, \{f\})$  はつねに解をもつということが従う。ただし  $\ell=2$  のときには,  $k$  の実無限素因子は  $K$  において不分岐であるとする。

次に  $K$  が 1 の原始  $\ell$  乗根  $\zeta$  を含まないとする。そのとき  $K/k$  が不分岐  $\ell$ -拡大ならば,  $K(\zeta)/k(\zeta)$  もまた不分岐  $\ell$ -拡大である。従って Reichardt<sup>2)</sup> の結果により, 次の定理が成り立つ。

定理 8.  $K/k$  を代数体の不分岐  $\ell$ -拡大とし,  $\ell=2$  のときには,  $k$  の実無限素因子は  $K$  において不分岐であるとする。 $\Omega$  を 1 の  $\ell$  乗根のなす群とし,  $\mathbf{g} = \text{Gal}(K/k)$  の  $\Omega$  への作用は trivial であるとする。そのとき  $H^2(\mathbf{g}, \Omega)$  において  $\{f\} \neq 1$  ならば, 埋めこみ問題  $P(K/k, \{f\})$  はつねに解をもつ。ここで  $K$  は必ずしも  $\Omega$  を含まなくてもよい。

終りに本研究に当り始終ご指導とご助言を賜った名古屋大学増田勝彦教授に謹んで感謝の意を表わします。

#### 文 献

- 1) R. Brauer: Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in Bezug auf ein gegebenes Zentrum sind, J. Reine Angew. Math. 168 (1932), 44—64.
- 2) H. Reichardt: Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 1—5.
- 3) H. Richter: Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme, Math. Ann. 112 (1936), 69—84.
- 4) I. R. Šafarevič: On the construction of fields with a given Galois group of order  $\ell^a$ , Amer. Math. Soc. Transl. (2) 4 (1956), 107—142.
- 5) 弥永昌吉編: 数論, 岩波書店, (1969).