

Point Matching 法による無梁板の解法

片 岡 靖 夫*

Analysis of Flat Slab by Point Matching

Yasuo KATAOKA*

(Received September 1, 1971)

This paper shows the application of Point Matching Method to Flat Slab. Point Matching Method was discussed by H. D. Conway for bending of rectangular plates, torsional problems and buckling. I have also applied the method to prismatic shell structures.

In this paper, stress and deflection in terms of complex potential are represented in the form of trigonometric series. One unit of Flat Slab surrounded by columns forms a triangular, square, and hexagonal panel as shown in Fig. 1. Deflection curves of these Flat Slabs are symmetrical to n-n, m-m and x axes.

1. 序

無梁板の応力は Lewe, W. Krieger 等多くの研究者によって求められており、それらはフーリエ級数を用いて柱配列が4角形を形成するものが主である。本解法は複素ポテンシャル関数をテーラー展開し、種々の境界条件に対し Point Matching 法を適用している。Point Matching 法は、H. D. Conway¹⁾ が矩形板の曲げ問題、捩り、座屈の簡単な境界値問題に用いその精度を確かめている。著者²⁾ はこの方法で折板の解析を行った。最近では M. L. Miller が半無限板上の粘性体の問題に応用している。

無梁板の柱配列が4角形 (Fig. 1-2) のものについては、W. Krieger 等の値、あるいは実用設計式で十分だが、その配列が3角形又は6角形を形成するものについ

ては従来の方法では制約を受ける。ここで述べる解法によれば柱配列に対称性を有する限り、無梁板の型に制限を受けない。

2. 解 析

無梁板で柱配列に対称性を有するものは Fig. 1 に示す3種類があり、ここでは直交座標軸の原点を柱配列一組の図心に定める。

直交曲線座標における曲げモーメント、せん断力と直交座標系のそれらの応力との関係は

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha} + M_{\beta} &= M_x + M_y \\ M_{\beta} - M_{\alpha} + 2iM_{\alpha\beta} &= e^{2i\delta} (M_y - M_x + 2iM_{xy}) \\ Q_{\alpha} - Q_{\beta} &= e^{i\delta} (Q_x - Q_y) \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

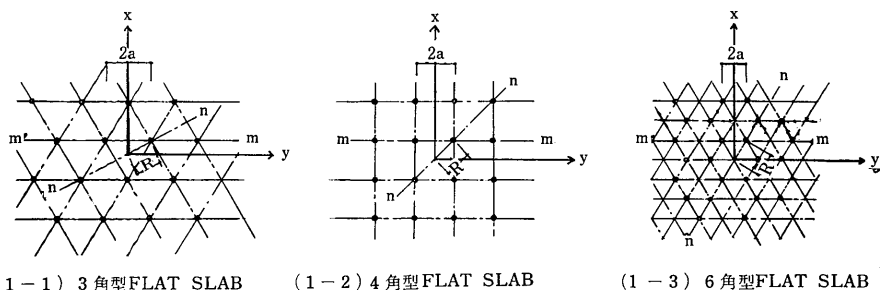


Fig. 1 無梁板の柱配列

*建築学科 (Department of Architecture)

換算せん断力, 撓角については

$$\left. \begin{aligned} \partial w / \partial \alpha - i \partial w / \partial \beta &= e^{i\delta} (\partial w / \partial x - i \partial w / \partial y) \\ V_{\alpha} - i V_{\beta} &= e^{i\delta} (V_x - i V_y) \end{aligned} \right\} \cdots (2)$$

これらの関係式は柱頭での曲線境界条件を満足させ, 一方主曲げモーメントを求める時に用いる。ここでは直交座標軸に平行な応力もすべてこの直交曲線座標に変換したものを用いている。

$$M_{\alpha} + M_{\beta} = (\cos 2\delta + i \sin 2\delta) \left[-\frac{1+\nu}{32} p \{3z^2 + 8z\bar{z} + 3\bar{z}^2\} - 2(1+\nu) \{ \phi'(z) + \overline{\phi'(\bar{z})} \} \right] \cdots (3)$$

$$M_{\beta} - M_{\alpha} + 2i M_{\alpha\beta} = (\cos 2\delta + i \sin 2\delta) \left[\frac{1-\nu}{16} p \{3z\bar{z} + 2\bar{z}^2\} + 2(1-\nu) \{ \bar{z} \phi''(z) + \psi'(z) \} \right] \cdots (4)$$

$$Q_{\alpha} - i Q_{\beta} = (\cos \delta + i \sin \delta) \left[-\frac{1}{8} p \{3z + 4\bar{z}\} - 4\phi''(z) \right] \cdots (5)$$

$$\partial w / \partial \alpha - i \partial w / \partial \beta = (\cos \delta + i \sin \delta) \left[\frac{1}{64D} p \{ \bar{z}(z + \bar{z})^2 + 2z\bar{z}(z + \bar{z}) \} + \frac{1}{D} \{ \overline{\phi(z)} + \bar{z} \phi'(z) + \psi(z) \} \right] \cdots (6)$$

$$V_{\alpha} - i V_{\beta} = -(\cos \delta + i \sin \delta) \left[\frac{1}{8} p \{ (5-\nu)\bar{z} + 3z \} + (5-\nu) \phi''(z) - (1-\nu) \{ z \phi'''(\bar{z}) + \psi''(z) \} \right] \cdots (7)$$

複素ポテンシャル関数を領域内でテラー展開し, その結果を直交座標系の成分で表わすと,

$$\begin{aligned} Dw &= \frac{Pr^4}{32} \cos^2 \theta + \sum_n r^{n+1} \cos(n-1)\theta a_n^1 - \sum_n r^{n+1} \sin(n-1)\theta a_n^2 \\ &+ \sum_n \frac{r^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\theta b_n^1 - \sum_n \frac{r^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\theta b_n^2 \cdots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{pr^2}{32} \{ (5+\nu) \cos 2\theta + (7+\nu) \} - \sum_n nr^{n-1} \{ 2(1+\nu) \cos(n-1)\theta + (1-\nu)(n-1) \cos(n-3)\theta \} a_n^1 \\ &+ \sum_n nr^{n-1} \{ 2(1+\nu) \sin(n-1)\theta + (1-\nu)(n-1) \sin(n-3)\theta \} a_n^2 \\ &- \sum_n nr^{n-1} \{ (1-\nu) \cos(n-1)\theta \} b_n^1 + \sum_n nr^{n-1} \{ (1-\nu) \sin(n-1)\theta \} b_n^2 \cdots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{7}{8} pr \cos \theta - \sum_n \{ 4n(n-1) r^{n-2} \cos(n-2)\theta \} a_n^1 + \sum_n 4n(n-1) r^{n-2} \sin(n-2)\theta a_n^2 \\ D \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{P}{16} r^3 \cos \theta \{ (\cos^2 \theta + 1) - i \sin \theta \cos \theta \} \\ &+ \sum_n \{ \{ nr^n \cos(n-2)\theta + r^n \cos n\theta \} a_n^1 - \{ nr^n \sin(n-2)\theta + r^n \sin n\theta \} a_n^2 \\ &+ \{ nr^n \cos n\theta b_n^1 - r^n \sin n\theta b_n^2 \} + i \sum_n \{ \{ nr^n \sin(n-2)\theta - r^n \sin n\theta \} a_n^1 \\ &+ \{ nr^n \cos(n-2)\theta - r^n \cos n\theta \} a_n^2 + \{ r^n \sin n\theta b_n^1 + r^n \cos n\theta b_n^2 \} \} \cdots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\nu-8}{8} pr \cos \theta + \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (\nu-5) \cos(n-2)\theta + (1-\nu)(n-2) \cos(n-4)\theta \} a_n^1 \\ &+ \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (5-\nu) \sin(n-2)\theta + (1-\nu)(n-2) \sin(n-4)\theta \} a_n^2 \\ &+ \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (1-\nu) \cos(n-2)\theta \} b_n^1 + \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (\nu-1) \sin(n-2)\theta \} b_n^2 \cdots (11) \end{aligned}$$

上の成分は境界条件を与える時に必要なものであり他の成分については省略した。

無梁板内に天窓等の開口部がある時は座標原点を穴の内部に定め負べきの項を加えなければならない。

3. 円柱に支持された無梁板

無梁板の円形柱頭は完全に固定されている。Fig. 2 で y 軸に平行な対称線 $m-m$ での境界条件は隣接する板との対称条件を満たす。

柱固定境界 $\partial w / \partial \alpha = 0, \partial w / \partial \beta = 0$

定義域でたわみ w を複素ポテンシャル関数で表示すると

$$2Dw = \frac{p}{64} z\bar{z}(z + \bar{z})^2 + \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(\bar{z})} + \chi(z) + \overline{\chi(\bar{z})}$$

特解は座標原点で 0 になるので板内のたわみは相対変位として計算され負の値となる。

複素ポテンシャル関数の微分から曲線座標での(1), (2)式は

$$\text{対称条件} \quad \partial w / \partial x = 0, Q_x = 0$$

対称条件は換算せん断力 $V_x = 0$ を用いるのが妥当だが, 両者の結果を検討すると捩りモーメントの値は対称軸上で共に 0 に収束している。

柱配列が Fig. 1 に示す 3 種類の無梁板は, おのおの n - n 対称軸で対称性を有するようにテラー級数の適当な項のみ残す。(8)式の n の値は

3 角型無梁板 (Fig. 1-1)

$$a^1_n; n=1, 4, 7, \cdots b^1_n; n=2, 5, 8, \cdots$$

4 角型無梁板 (Fig. 1-2)

$$a^1_n; n=1, 5, 9, \dots \dots b^1_n; n=3, 7, 11, \dots \dots$$

6角型無梁板(Fig. 1-3)

$$a^1_n; n=1, 7, 13, \dots \dots b^1_n; n=5, 11, 17, \dots$$

x 軸での対称条件はたわみ w の一般式で正弦級数は除くことで満足する。従って対称性のある柱で支持された無梁板は Fig. 2 の3角形板について解けばよい。

たわみ w の特解の項で $\cos 2\theta$ は一般解の $\cos 2\theta$ の項と共に 0 とする。その結果境界条件に用いる諸式は

$$\begin{aligned} D \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{p}{64} r^3 (5 \cos \theta + \cos 3\theta) + r^3 \{ \cos \theta + \cos 3\theta \} a_n^1 \\ &+ \sum_n r^n \{ n \cos(n-2)\theta + \cos n\theta \} a_n^1 \\ &+ \sum_n \{ r^n \cos n\theta \} b_n^1 \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{pr^3}{16} \left\{ \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin \theta}{2} \right\} \\ &- r^3 \{ \sin \theta - \sin 3\theta \} a_n^1 \\ &- \sum_n r^n \{ n \sin(n-2)\theta - \sin n\theta \} a_n^1 - \sum_n \{ r^n \sin n\theta \} b_n^1 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$Q_x = -\frac{7}{8} pr \cos \theta - \{ 24r \cos \theta \} a_n^1 - \sum_n \{ 4n(n-1)r^{n-2} \cos(n-2)\theta \} a_n^1 \dots \dots \dots (14)$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\nu-8}{8} pr \cos \theta - 24r \cos \theta a_n^1 + \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (\nu-5) \cos(n-2)\theta \\ &+ (1-\nu)(n-2) \cos(n-4)\theta \} a_n^1 + \sum_n r^{n-2} n(n-1) \{ (1-\nu) \cos(n-2)\theta \} b_n^1 \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

4. 教値解析

Point Matching は Fig. 3 の $m-m$ 対称境界および柱頭円境界で行い、境界点の位置は Fig. 3 に示す。合計 35 点の境界条件で、4角型無梁板の場合 $a^1_1, a^1_3, a^1_5, \dots \dots a^1_{187}, b^1_3, b^1_7, \dots \dots b^1_{185}$ 70個の係数を求める。応力の収束性はその係数の値から判断出来ない。応力集中の大きい柱頭近辺の境界には Point Matching を多く行い精度を高める。この解法では境界条件を与えた点以外厳密にその条件を満足しておらず、点間について、求めた係数を用いて条件式を満足しているかいなかを検討する。この種の無梁板は Fig. 3 に示した Point

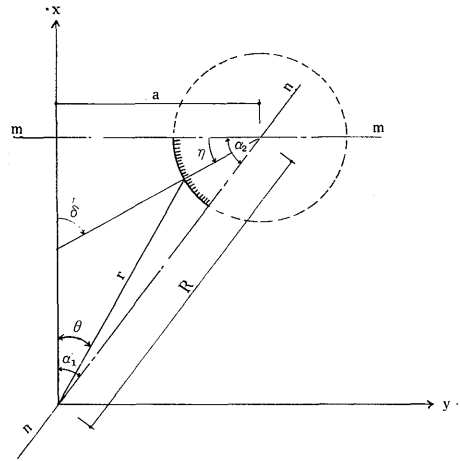


Fig. 2 座 標

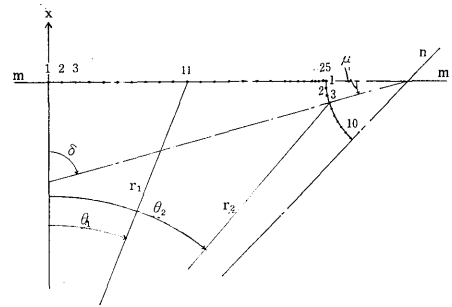
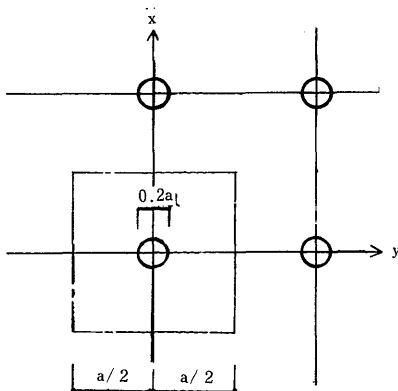
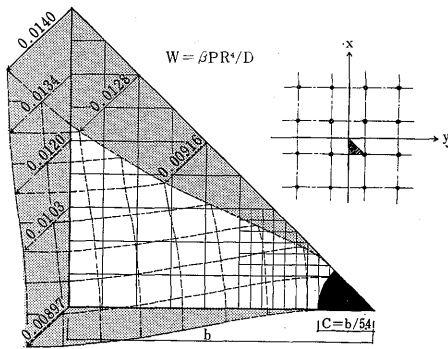
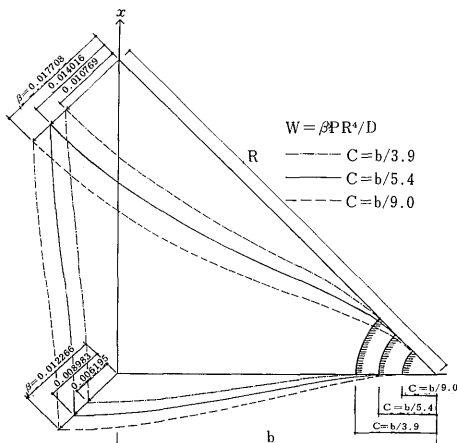


Fig. 3 Point Matching

Table. 1

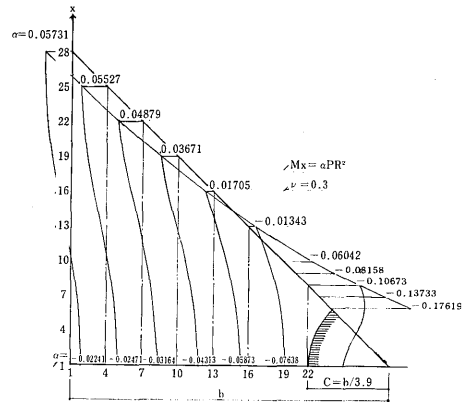
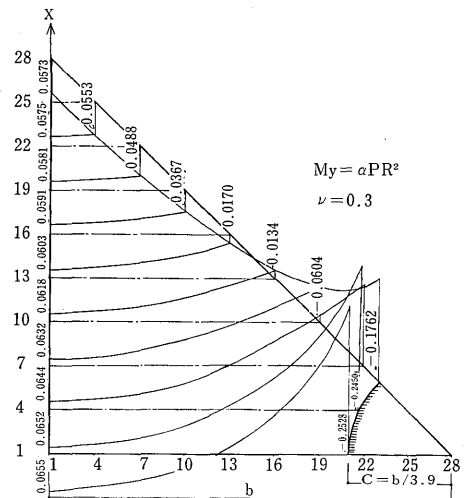
BENDING MOMENT	LOCATION	RIGID CONECTION	COSTOMARY THEORY	本 解
$M_x = M_y$	$x = a/2$ $y = a/2$	0.0292	0.0323	0.0284
M_x	$x = a/2$ $y = 0$	0.0399	0.0494	0.0399
M_y	$x = a/2$ $y = 0$	-0.0161	-0.0179	-0.0161
M_r	$r = c$	-0.1682	-0.0629	-0.1725



Fig. 4 たわみ (4角型梁板 $c=b/5.4$)Fig. 5 たわみ比較図 (4角型無梁板 $c=b/3.9$, $b/5.4$, $b/9.0$)

Matching で十分満足すべき値を得ることが出来た。
4角型無梁板について F. Tölke の値と本解を比較した表が示してある。ポアソン比は 0.2 である。

Fig. 4 から Fig. 7 は 4角型無梁板 (ポアソン比 0.3) のたわみおよび曲げモーメントである。Fig. 5 で円形柱の径の違いによるたわみ w を比較してあり、それぞれの値は柱内スパンの 4 乗にはほぼ反比例する。Fig. 6, Fig. 7 は同じ型の無梁板であり、曲げモーメント M_x, M_y の最大値は短スパン方向柱頭部分に生ずる。柱径とスパンの比が小さくなるにしたがい柱頭部の応力集中が著しく大きくなり、実用設計では $c=b/7$ 以内にするのが望ましい。正の最大モーメントは短スパン方向中央に生ずるが、これは柱径の影響が小さく $c=b/3.9, b/5.4, b/9.0$ に対しそれぞれ $0.0655pR^2, 0.0771pR^2, 0.0876pR^2$ となる。

Fig. 6 曲げモーメント M_x Fig. 7 曲げモーメント M_y

文 献

- 1) Conway, H. D., The Approximate Analysis of Certain Boundary-Value Problems, "Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, Trans. ASME, Vol. 82, Series E. 1960.
- 2) 谷, 片岡, 折板の弾性学的研究, 建築学会大会学術講演梗概集, 昭42
- 3) MUSKHELISHVILI, N. I., Some Basic Problems of The Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd. Groningen-The Netherlands 1963
- 4) Timoshenko and Woinowsky-krieger., Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill