

3 次 代 数 方 程 式 の ワイル型電子計算機による解法 (第1報)

山 村 正 明*

To Find the Real Roots of Cubic Equations by "WYLE" Desk-Computer with Card Reader

Masaaki YAMAMURA*

(Received September 19, 1968)

In this paper, one of the methods is presented for solving a cubic equation by the use of the WYLE scientific electronic calculator.

An arbitrary cubic equation transformed into the form, $x^3+rx+s=0$, is solved in case of $(s/2)^2+(r/3)^3>0$.

The first approximate value which is to be used as an input, can be found by means of the curves prepared for a number of values of r and s in the range of 0~100. A table showing very accurate values of root for various r and s is obtained by the successive approximation method.

The present approach has some advantageous points. That is, by using the programmed card the calculation is made simply, fastly, and accurately.

Furthermore, several approximate equations are obtained and are of practical use.

1. 緒 論

1元3次代数方程式の数値解法については、古くから数学者あるいは応用方面からの工学者などによって数多くの研究がなされている。

例えば第1近似値を知って反復・収束させる方法〔Newton-Raphson法・Bairstow法・Lin法・はさみうち(regula falsi)法など〕や収束はかなりおそいが、第1近似値を必要としない方法〔Graeffe法・Lehmer法・Bernoulli法など〕などがある。¹⁾ また実用的でオーソドックスな方法として、立方根表を用いて2項定理による解法²⁾がある。

また数学的に1実根を求めるには Cardan の式あるいは3実根の場合には三角関数によって表わされる式などがある。

今日のように電子計算機の発達した時代にはこれら従来の方法を用いても割合容易にその根は算出されうる。しかし、第1近似値を求める時あるいは第1近似値を用

いないで根を求める場合、あるいはプログラムを組む時など案外時間をとるものである。

そこで本報告では実際に3次式を解く立場から一般式を

$$x^3+3px+2q=0$$

と変形し、今回は1実根と2共役虚根の出る場合について考察した。ただし2個の共役虚根については実際上あまり必要ないとみなして1実根についてのみ考察した。

2. $f(x)=x^3+s=0$ ($s=2q$) の場合

$s<0$ として書き換えれば、

$$x=\sqrt[3]{s}$$

となり、立方根を求めることになる。

これはすでに計算され、多くの数表となつて出ているので、ここでは数表を用いず、小型卓上計算機で容易に3桁程度求めることのできる式を考察する。

この意味において魚木五夫氏によって考案作成されたテイラー展開に基づく近似式³⁾

$$1 \leq s < 10$$

$$x = \sqrt[3]{s} \approx 0.319 + 0.732\sqrt{s} - 0.0438s \quad (4)$$

* 本学機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

最大相対誤差 2.3×10^{-8}

がある。この式は本報告の意とするところにマッチした式なのでここに大幅に取り入れた。

この式には $1 \leq s < 10$ という範囲があるので、それ以外では適用できない。そこでこの式を拡張し、全域に使えるようにした。それが次式である。

$$0.1 \leq s < 1$$

$$x_1 = x \times \sqrt[3]{0.1} = 0.46415 \ 89x \\ \approx 0.148 + 0.340\sqrt{s_1} - 0.0224 s_1 \quad (5)$$

$$\text{ここに } s_1 = s \times 10$$

$$10 \leq s < 100$$

$$x_2 = x \times \sqrt[3]{10} = 2.15443 \ 5x \\ \approx 0.687 + 1.577\sqrt{s_2} - 0.104 s_2 \quad (6)$$

$$\text{ここに } s_2 = s/10$$

これ以外の範囲については x の位を 3 桁ごとにずらしていけばよいことになる。

これら (4), (5), (6) 式では 10^{-8} の位は信頼できないので、(4) 式のもう一つの拡張として、同系列で 10^{-8} まで十分信頼できる式を作成したので次に示す。

$$1.0 \leq s < 10$$

$$x \approx 0.2493 + 0.8558\sqrt{s} - 0.1163s + 0.0115\sqrt{s^3} \quad (7)$$

$$10 \leq s < 100$$

$$x \approx 0.5371 + 1.8437\sqrt{s_1} - 0.2506s_1 + 0.0248\sqrt{s_1^3} \quad (8)$$

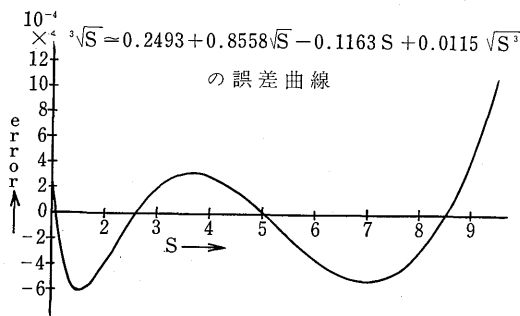
$$\text{ここに } s_1 = s/10$$

$$0.1 \leq s < 1.0$$

$$x \approx 0.1156 + 0.3972\sqrt{s_2} - 0.0540s_2 + 0.0053\sqrt{s_2^3} \quad (9)$$

$$\text{ここに } s_2 = s \times 10$$

この (7) 式における最大相対誤差は 5.3×10^{-4} である。またこの絶対誤差曲線を示すと第 1 図となる。



第 1 図

3. $f(x) = x^3 + rx + s = 0$ の場合
($r = 3p > 0$, $s = 2q$)

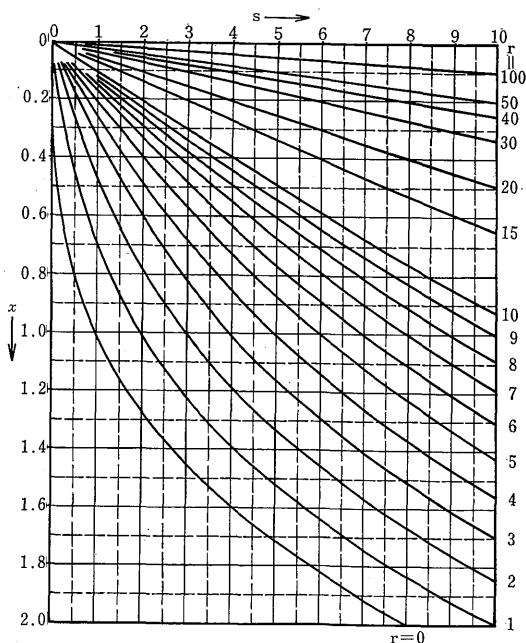
前に記した 2. の場合はこの式で $r=0$ とした場合であるので、今度はこれを含めた一般的な形として考えてみる。

2. の時のように近似式も考えてみるけれど、ここでは 2~3 桁の根の値を読み取ることのできるグラフを作成した。またそれ以上精度の必要場合はその値を第 1 近似値として、反復公式にかけるという方法をとる。

まず根をグラフに表わすため代表値として、 $r=0, 1, 2, 3, \dots, 10$ までと 15, 20, 30, 40, 50, 100 の 17 個、 $s=0.05, 0.1, 0.15, \dots, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, \dots, 10.0, 11, 12, 13, \dots, 35, 40, 45, 50, \dots, 100$ について多少手間をとったが、Cardan の式を使って立方根号の中を 10 桁の卓上計算機* で算出し、開立方には引数 4 桁の数表⁽⁴⁾により見い出した。

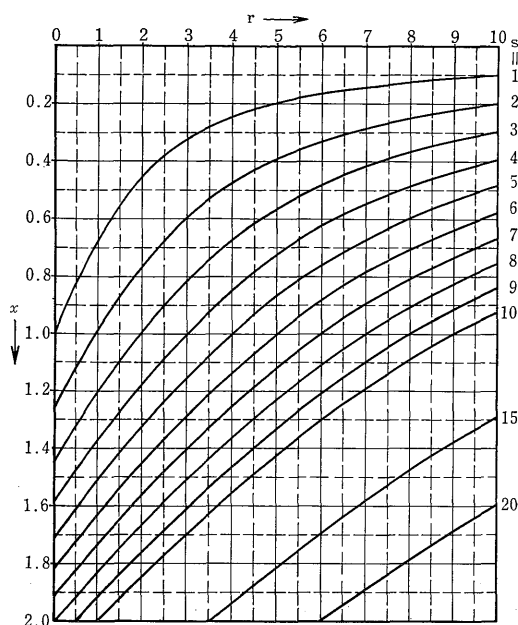
そして、求められた値を基にして、 s と x をベースとしたグラフを作成した。その一部分が第 2 図であり、その値を使って中間値を読みやすくするために r と x をベースとしたグラフも描いた。それが第 3 図である。

実際には s を 0-1, 1-10, 10-30, 30-60, 60-100 の 5 枚に分けてグラフにしたので、代表値以外の中間値についても、グラフから見当をつけ、読み取れば 2~3 桁は使える。



第 2 図

* アレフ・ゼロ型卓上電子計算機, 大井電気製



第 3 図

これで桁数が不足ならば、反復公式にかければ十分な桁数を算出することができる。

代表値についてはグラフを作成する時求めた値を第 1 近似値とし、ニュートン・ラフソンの反復公式を用いて 23 桁卓上電子計算機* で 17~20 桁まで計算を行ったので、その手法について紹介し、その結果の 1 部を末尾に附しておいた.**

(3) 式のニュートン・ラフソンの反復公式は、

$$x_n \approx \frac{2x_{n-1}^3 + s}{3x_{n-1}^2 + r} \quad (r=3p, s=2q) \quad (10)$$

となる。そこで手もとにあるワイル卓上電子計算機にかけ、この(10)式を繰返し、その後検算をできるようにカードにプログラムした。

この場合のプログラムでは、普通の卓上型電子計算機の押しボタンによる操作法とほとんど同じ程度ではあるが、I.B.M. 式カードを用いることにより作業者をわずらわさずとも容易にプログラムによる計算が極めて短時間内に完了できる。

(10)式をカードにプログラムすると次のように 24 ステップで、この場合データとして x_1, s, r をそれぞれ先に入れて、21 桁の計算で 23 ステップを 3 回繰返すと約 21 秒かかり 19 桁まで収束する。

* WYLYE 型卓上電子計算機 (カードリーダー付・23 桁レジスター) ; 米国ワイル社製

** 第 1 表

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. clear ENT. | Tr. |
| 2. 3 | 15. CL. & MULT. |
| 3. Decimal Point | 16. from ACC, to ENT, |
| 4. Clear & Multiply | Tr. |
| 5. from ACC. to ENT. | 17. CL. & MULT. |
| Transfer. | 18. from R ₂ , to ENT, |
| 6. Clear & Multiply | Tr. |
| 7. from REG ₁ , | 19. ADD (+) |
| to ENT, Tr. | 20. from R ₃ , to ENT, |
| 8. ADD (+) | Tr. |
| 9. from ACC, | 21. + |
| to REG ₃ , Tr. | 22. clear ENT., |
| 10. clear ENT. | clear ACC. |
| 11. 2 | 23. from ACC., to R ₃ , |
| 12. D.P. | Tr. |
| 13. CL. & MULT. | 24. STOP |
| 14. from ACC, to ENT. | |

このプログラムをカードに組みまちがいのないようにするのに不慣れではあったが約 10~15 分かかった。

次に検算においては

$$f(x_n) = x_n^3 + rx_n + s \quad (11)$$

をプログラムすれば次のようになり、9 ステップで約 3 秒で計算し終る。

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. from MQ, to ENT, | 6. MULT. + |
| Tr, | 7. from R ₂ , to ENT., |
| 2. CL. & MULT. | Tr. |
| 3. from ACC., to | 8. SUB (-) |
| ENT., Tr. | 9. STOP. |
| 4. CL. & MULT. | |
| 5. from R ₁ , to ENT., | |
| Tr. | |

結局 1 実根を求めるのに第 1 近似値 4 桁を知って 21 桁で計算し、19~20 桁求めるのに検算まで入れて、25 秒たらず (r, s の小さい時はもっと速くできる) で計算できる。

又近似式を考えてみると、ある一部の範囲内においては次のように非常に簡単な式で表わすことができることがわかった。

$$x \approx \frac{s}{r}$$

$$s < \frac{r}{10} \text{ の時 } 10^{-4} \text{ 以下の誤差}$$

$$s < \frac{r}{5} \text{ の時 } 10^{-3} \text{ 以下の誤差}$$

次に 2, 3 の例をあけて説明する。

〔例 1〕 文献 2) の〔例題 2〕の場合

$$x^3 + 5x - 0.8 = 0$$

の式の根を求めてみよう。

まず第 1 近似値 $x_1 = 0.159$ を知る。そして前にのべたプログラムを使って計算すると、

$$x_4=0.15919\ 31311\ 11595\ 56210\ 2$$

これを検算して

$$f(x_4)=0.00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 2$$

又 $x_1=0$ より出発すると、4回の繰返しで31秒後に同一結果がでる。

ここで文献2)に報告してある根の値と比べてみると、

$$x=0.15919\ 31311$$

とあるので、これは10桁まで本報告とまったく一致している。

〔例2〕

$$x^3-9x^2+36x-80=0 \quad \text{を解く}^{5)}$$

これは、 $z=x-3$ とおけば、

上の方程式は

$$z^3+9z-26=0$$

とおき換えられる。これは例1と同様にして、

$$z_1=2$$

という値がグラフ、あるいは表より見いだされる。これは $z=2$ として検算カードで検算してみると $f(x)=0$ となり、ぴったり2であることになる。よって x は、

$$x=2+3=5$$

と整数の根が求まる。

これも $x_1=0$ より開始して繰返すと、7回50秒で21桁まで収束する。

〔例3〕

$$x^3-6x^2+17x-25=0$$

を解く⁶⁾

$$z=x-2 \quad \text{とおくと上式は、}$$

$$z^3+5z-7=0$$

となる。これを前例と同様に行なえば、

$$z=1.11943\ 75270\ 62630\ 90109\ 3$$

$$f(z)=-0.0^{18}107$$

よって、

$$x=3.11943\ 75270\ 62630\ 90109\ 3$$

文献6)の159頁、例6には解として

$$x_1=3.121$$

とある。

これはもう小数点以下3桁目はちがっている。

そこで、与えられた式 $f(x)=x^3-6x^2+17x-25$ に x の値を代入して計算してみると、

$$x=3.11943\ 75270\ 62630\ 90109\ 3 \quad \text{のときは}$$

$$f(x)=0.0^{19}28$$

$$x_1=3.121 \quad \text{のときは}$$

$$f(x_1)=0.0137$$

となる。 $f(x_1)$ をみるとこれは $f(x)=0$ となるはずなので大変な誤差であることがわかる。

4. む す び

$$f(x)=ax^4+bz^2+cz+d \quad \text{を}$$

$$f(x)=x^3+rx+s=0$$

と変形して、 $r>0$ である場合の $r=0\sim100$, $s=0\sim100$ を代表値について計算し、グラフおよび表を作成した。

これで、 $r<100$, $s<100$ においては、

・グラフより2～3桁の根を求めることができる。

・表ではそのものずばりが15桁まで求められる。

・ワイル卓上電子計算機でカードを使って計算すれば21桁が20秒くらいの短時間で求根できる。

・ $r>0$ の場合には、このカード1枚ですべての場合の計算が可能である。

などがいえる。今回作成した表およびグラフはその一部分のみ付け加えた。

また2, 3の近似式についても実用には十分供するものと信ずる。

本研究に当たり、本学福原達三教授には、終始全面的に御指導賜わり、ここに改めて深く謝意を表する次第であります。

また本学井藤正照助教授を始め、本学機械工学科の諸先生方には有益なる御助言を賜わり厚く謝意を表します。

文 献

- 1) 山内二郎他：電子計算機のための数値計算法I．培風館，1965.
- 2) 福原達三：立方根の表を用いて3次方程式を解く法．中部工業大学紀要第2集，1966.
- 3) 一松 信：近似式．竹内書店，1963.
- 4) 春日屋伸昌：初等数値表I．日新出版，1962.
- 5) 銀林 浩：高次方程式．東京図書，1967.
- 6) 麻嶋格次郎：高等代数．総合図書，1967.

第 1 表

s/r	0			2			4		
0	0.00000	00000	00000	0.00000	00000	00000	0.00000	00000	00000
0.1	0.46415	88833	61278	0.04993	77332	09797	0.02499	60955	79911
0.2	0.58480	35476	42573	0.09950	73533	54360	0.04996	88084	47684
0.3	0.66943	29500	82170	0.14836	70154	13389	0.07489	49737	09486
0.4	0.73680	62997	28077	0.19622	24017	72757	0.09975	18564	62212
0.5	0.79370	05259	84100	0.24283	97325	85481	0.12451	73529	59226
0.6	0.84343	26653	01749	0.28804	98595	94665	0.14917	01759	55218
0.7	0.88790	40017	24601	0.33174	49521	97223	0.17369	00201	79806
0.8	0.92831	77667	22556	0.37387	03755	90705	0.19805	77048	10915
0.9	0.96548	93846	05630	0.41441	43853	43717	0.22225	52908	29536
1.0	1.00000	00000	00000	0.45339	76515	16404	0.24266	61721	67723
2	1.25992	10498	94873	0.77091	69970	59248	0.47346	58077	29126
3	1.44224	95703	07408	1.00000	00000	00000	0.67359	30582	18710
4	1.58740	10519	68199	1.17950	90246	02917	0.84770	75981	39567
5	1.70997	59466	76697	1.32826	88556	68608	1.00000	00000	00000
6	1.81712	05928	32140	1.45616	42461	35908	1.13472	84533	61846
7	1.91293	11827	72389	1.56894	64030	52382	1.25538	31568	44753
8	2.00000	00000	00000	1.67024	46969	62733	1.36465	56076	56039
9	2.08008	38230	51904	1.76249	63764	55360	1.46459	57012	42776
10	2.15443	46900	31884	1.84741	90378	32733	1.55677	32643	94211
15	2.46621	20743	30470	2.19709	10517	88709	1.93597	94114	05640
20	2.71441	76165	94907	2.46954	56501	06594	2.22949	42194	09034
25	2.92401	77382	12866	2.69651	87212	33586	2.47227	49997	46790
30	3.10723	25059	53859	2.89304	36775	59636	2.68121	95481	42766
35	3.27106	63101	88590	3.06753	92405	29067	2.86581	85111	67057
40	3.41995	18933	53393	3.22524	04627	91780	3.03196	04553	85641
45	3.55689	33044	90063	3.36964	64093	02495	3.18356	60053	89209
50	3.68403	14986	40387	3.50322	29908	64116	3.32338	62216	42360
60	3.91486	76411	68864	3.74468	87194	49900	3.57521	88167	49808
70	4.12128	52998	08557	3.95960	97892	36736	3.79847	78865	52661
80	4.30886	93800	63767	4.15421	86305	34663	4.00000	00000	00000
90	4.48140	47465	57165	4.33269	83228	38260	4.18434	49724	19832
100	4.64158	88336	12779	4.49800	71138	06810	4.35472	01898	76522

第 1 表 (続き)

s/r	6			8			10		
0	0.0000	0000	0000	0.0000	0000	0000	0.0000	0000	0000
0.1	0.0166	58951	68876	0.0124	97558	73679	0.0099	99000	03000
0.2	0.0332	71639	20644	0.0249	80473	32621	0.0199	92000	95985
0.3	0.0497	91926	65013	0.0374	34116	76826	0.0299	73007	28738
0.4	0.0661	73933	65932	0.0498	43896	30153	0.0399	36030	70035
0.5	0.0832	72160	71750	0.0624	95270	38242	0.0498	75093	65636
0.6	0.0998	41611	53201	0.0749	73765	49724	0.0597	84232	94463
0.7	0.1164	37911	58701	0.0874	64992	57326	0.0696	57503	22396
0.8	0.1329	17422	02094	0.0987	54664	19595	0.0794	88980	53078
0.9	0.1494	37348	04811	0.1123	28608	80169	0.0892	72765	75166
1.0	0.1659	55841	22213	0.1247	72788	09688	0.0990	02988	05473
2	0.3274	00020	73326	0.2480	12701	69992	0.1992	94491	61235
3	0.4814	56002	20840	0.3687	31875	69376	0.2973	03792	37464
4	0.6258	68189	58467	0.4856	94651	70962	0.3938	88753	06402
5	0.7601	24177	55419	0.5982	72700	97699	0.4883	33127	28565
6	0.8846	22003	96905	0.7060	09721	29079	0.5804	39611	37585
7	1.0000	00000	00000	0.8088	19405	18905	0.6699	27549	78214
8	1.1071	75644	35333	0.9067	53030	32808	0.7566	58866	89259
9	1.2069	98141	88443	1.0000	00000	00000	0.8406	20637	73453
10	1.3002	09768	39129	1.0886	99191	65893	0.9216	89942	04679
15	1.6922	64985	07288	1.4743	71136	87397	1.2868	32959	38455
20	2.0000	00000	00000	1.7868	49203	46284	1.5985	21166	31153
25	2.2551	37733	94328	2.0492	58831	00364	1.8582	87935	25664
30	2.4745	18963	84314	2.2760	15350	70375	2.0887	01451	01795
35	2.6680	11431	67863	2.4764	09122	75470	2.2935	35037	86029
40	2.8417	73102	16331	2.6565	77113	37217	2.4781	65345	23825
45	3.0000	00000	00000	2.8204	66906	02626	2.6464	82024	29590
50	3.1456	69663	03468	2.9712	62082	15370	2.8014	14673	22129
60	3.4072	30664	96593	3.2417	54365	27404	3.0795	90060	72578
70	3.6385	11950	58700	3.4803	65586	46619	3.3247	94145	02319
80	3.8466	58724	27411	3.6948	80756	65465	3.5449	78276	16040
90	4.0367	62189	85543	3.8903	20796	39607	3.7455	46274	80444
100	4.2120	30848	70909	4.0703	14786	88868	3.9300	73896	91525