

曲げこわさがスパンの左右半分で 異なる段付き梁の弾性曲線

福 原 達 三*

Elastic Curves of Stepped-Beams Having the Different Values of Flexural Rigidity on Each Half Length of Span

Tatsuzo FUKUHARA*

(Received September 19, 1968)

As is well-known if any cross-section of the beam has a certain value of modulus of rigidity EI along the span of the beam, the form of elastic curves is simply found by the standard way of integration.

This paper aims to find the equations for deflection of beams when the values of EI for the right and left halves of the span are different.

Under the assumption that the relation $I_1 = nI_2$ holds where I_1 and I_2 refer to the both sides of the beam, the form of elastic curves is shown for various values of n .

まえがき 梁の曲げこわさは、材料のヤング率 E と断面の主軸に関する断面 2 次モーメント I との積、 EI で表わされる。この値が梁の全長にわたって一定であり、また各断面の垂直方向のたわみ y がスパンの長さに比して相当に小さいときには、各断面に作用する曲げモーメント M を、断面の位置を示す尺度 x に関する代数式で表わせるので、その式を 2 度積分して弾性曲線の式を求めることはたやすく、その結果は多くの書籍にでている。

曲げこわさが、梁の領域によって相違する場合には、領域によって弾性曲線はそれぞれ別な式によって表わされるが、各領域の境目では連続条件が成りたつように、積分定数を決める必要がある。これらの定数をきめるには相当の手数がかかる場合もあり、その作業中に誤を生じることもあって、この種の問題の解決を迫られる技術者を悩ますことも多い。

梁の曲げこわさ、その他の条件が一般的な場合であれば、そのときの解決にはステップ函数を利用したり、またはマトリックス演算によって手続が簡単になるという意見もあるが、事実上やはりある程度の手数がかかり、作業の途中で混乱を起こしやすく、適切な解答を得るに至らない場合もある。

この報告で扱った問題は、ある現場の技術者が提示した条件を単純化し、その代表的な場合の弾性曲線を代数式で表わすのに、一応正面から積分法によって求め、さらにできるだけ重ね合わせの原理によって驗算をし、結果に誤のないように努めた。計算の途中経過は省略し、結果のみを列記したので、各種便覧と同じように利用されることを念願する。

取扱った梁は左端を A 、右端を B とし、その中点を C とした。 AB の長さを l とし、弾性曲線を表わすために、 A を座標原点にとり、水平 x 軸をそれより右に、垂直 y 軸を下に向かって引いた。梁の左半分 AC 部で主軸に関する断面 2 次モーメントを一定値 I_1 とし、 CB 部のそれを I_2 とし、 $I_1 = nI_2$ の関係があり、 $I_1 \geq I_2$ として $n \geq 1$ となるとした。 C 点における断面の急変による応力集中による影響は考えないことにした。

曲げこわさ EI_1 の逆数を B_1 、 EI_2 の逆数を B_2 とすれば、 $B_1 \leq B_2$ となり、 $B_2 = nB_1$ となる。特殊な問題では $n=1, 2, 3, 4, 5$ の整数値について、各種の数値を計算してみた。

支点における反力を R 、断面に作用するモーメントを M 、傾斜を i 、たわみを y で表わし、特定の点 A 、 B 、 C 等における諸量を示すためには R_a 、 M_a 、 i_a 、 y_a のように右下に小文字をつけて、その所在を明かにした。

* 本学機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

弾性曲線を $n \neq 1$ の場合について計算し、それを図示すれば、断面が C に対して対称の位置にあり、かつ荷重の条件も中央に対し対称であっても、たわみは左側よりも右側の方が大きくなる。そのため弾性曲線は AC 部より CB 部の方が伸びて長くなったように見える。これはこの報告では、各断面が垂直方向のみに移動するという前提のもとに処理しているので、梁の伸びは考えていない。

これは梁のスパンに比して、たわみ量を極めてわずかとしたため、 y の値が増大しても弾性曲線の長さが増すことは考慮する必要がないとするためである。

〔1. 1〕片持ち梁：左端固定、右端（自由端）に集中荷重 P が作用

釣合条件 $\Sigma F = P - R_a = 0$ から、 $R_a = P$ を得る。 R_a は上向きの反力である。 A 点に関するモーメントを M_1 とし $\Sigma M = M_1 - R_a l = 0$, $M_1 = R_a l = Pl$

$$\underline{AC \text{ 部}}: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = P(l-x) \quad (1.1.1)$$

$$A \text{ 点}: x=0, M_a = Pl = M_1$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, M_c = \frac{1}{2}Pl = \frac{1}{2}M_a = \frac{1}{2}M_1$$

$$i = \frac{1}{2}B_1Px(2l-x) \quad (1.1.2)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, i_c = \frac{3}{8}B_1Pl^2 = \frac{3}{8}B_1M_al$$

$$y = \frac{1}{6}B_1Px^2(3l-x) \quad (1.1.3)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, y_c = \frac{5}{48}B_1Pl^3 = \frac{5}{48}B_1M_al^2$$

$$\underline{CB \text{ 部}}: \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = P(l-x) \quad (1.1.4)$$

$$B \text{ 点}: x=l, M_b=0$$

$$i = \frac{1}{8}B_1P[3(1-n)l^2 + 4nx(2l-x)] \quad (1.1.5)$$

$$B \text{ 点}: x=l, i_b = \frac{1}{8}(n+3)B_1Pl^2$$

$$= \frac{1}{8}(n+3)B_1M_al$$

$$y = \frac{1}{24}B_1P[2(n-1)l^3 - 9(n-1)l^2x + 4nx^2(3l-x)] \quad (1.1.6)$$

$$B \text{ 点}: x=l, y_b = \frac{1}{24}(n+7)B_1Pl^3$$

$$= \frac{1}{24}(n+7)B_1M_al^2$$

〔1. 2〕片持ち梁：左端固定、右端にモーメント M_2 が作用

モーメント M_2 が作用するため、左端に発生する力を Q とすれば、 B 点に関するモーメントは

$\Sigma M = M_2 + Ql = 0$, $M_2 = -Ql$, 別に $\Sigma F = Q + R_a = 0$, $R_a = -Q$, R_a は下向きの力である。

$$\underline{AC \text{ 部}}: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = -Qx \quad (1.2.1)$$

$$A \text{ 点}: x=0, M_a=0$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, M_c = -\frac{1}{2}Ql = \frac{1}{2}M_2$$

$$i = -\frac{1}{2}B_1Qx^2 \quad (1.2.2)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, i_c = -\frac{1}{8}B_1Ql^2 = \frac{1}{8}B_1M_2l$$

$$y = -\frac{1}{6}B_1Qx^3 \quad (1.2.3)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, y_c = -\frac{1}{48}B_1Ql^3 = \frac{1}{48}B_1M_2l^2$$

$$\underline{CB \text{ 部}}: \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = -Qx \quad (1.2.4)$$

$$B \text{ 点}: x=l, M_b = -Ql = M_2$$

$$i = \frac{1}{8}B_1Q[(n-1)l^2 - 4nx^2] \quad (1.2.5)$$

$$B \text{ 点}: x=l, i_b = -\frac{1}{8}(3n+1)B_1Ql^2$$

$$= \frac{1}{8}(3n+1)B_1M_2l$$

$$y = -\frac{1}{24}B_1Q[(n-1)l^3 - 3(n-1)l^2x + 4nx^2]$$

$$(1.2.6)$$

$$B \text{ 点}: x=l, y_b = -\frac{1}{12}(n+1)B_1Ql^3$$

$$= \frac{1}{12}(n+1)B_1M_2l^2$$

〔1. 3〕片持ち梁：左端固定、純粋彎曲（モーメント M_0 が左右両端から作用）

これは〔1.1〕の諸式に $M_0 = M_1$ を入れ、〔1.2〕に $M_0 = -M_2$ とおいて重ね合せた場合に相当する。

反力： $R_a=0$, $R_b=0$

$$\underline{AC \text{ 部}}: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = P(l-x) + Qx = M_0 \text{ (定数)} \quad (1.3.1)$$

$$i = \frac{1}{2}B_1Px(2l-x) + \frac{1}{2}B_1Qx^2 = B_1M_0x \quad (1.3.2)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, i_c = \frac{1}{2}B_1M_0l$$

$$y = \frac{1}{6}B_1Px^2(3l-x) + \frac{1}{6}B_1Qx^3 = \frac{1}{2}B_1M_0x^2 \quad (1.3.3)$$

$$C \text{ 点}: x = \frac{1}{2}l, y_c = \frac{1}{8}B_1M_0l^2$$

$$\underline{CB \text{ 部}}: \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = M_0. \quad (\text{定数}) \quad (1.3.4)$$

$$i = \frac{1}{2}B_1M_0[2nx - (n-1)l] \quad (1.3.5)$$

$$B \text{ 点}: \quad x=l, \quad i_b = \frac{1}{2}(n+1)B_1M_0l$$

$$y = \frac{1}{8}B_1M_0[(n-1)l^2 - 4(n-1)lx + 4nx^2] \quad (1.3.6)$$

$$B \text{ 点}: \quad x=l, \quad y_b = \frac{1}{8}(n+3)B_1M_0l^2$$

〔1. 4〕片持ち梁： 左端固定，中点 C に集中荷重 P が作用 反力： $R_a = P$

$$\underline{AC \text{ 部}}: \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = \frac{1}{2}P(l-2x) \quad (1.4.1)$$

$$A \text{ 点}: \quad x=0, \quad M_a = \frac{1}{2}Pl$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = 0$$

$$i = \frac{1}{2}B_1P(lx - x^2) \quad (1.4.2)$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{8}B_1Pl^2$$

$$y = \frac{1}{12}B_1P(3lx^2 - 2x^3) \quad (1.4.3)$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{24}B_1Pl^3$$

$$\underline{CB \text{ 部}}: \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

この部分で弾性曲線は直線となる。

$$M = 0 \quad (1.4.4)$$

$$i = i_c = \frac{1}{8}B_1Pl^2 \quad (\text{定数}) \quad (1.4.5)$$

$$y = \frac{1}{48}B_1Pl^2(6x-l) \quad (1.4.6)$$

$$B \text{ 点}: \quad x=l, \quad y_b = \frac{5}{48}B_1Pl^3$$

〔1. 5〕片持ち梁： 左端固定， AC 間の点 D に集中荷重 P が作用 $AD = \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}l$

$$\underline{AD \text{ 部}}: \quad 0 \leq x \leq \lambda$$

$$M = P(\lambda - x) \quad (1.5.1)$$

$$A \text{ 点}: \quad x=0, \quad M_a = P\lambda$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad M_d = 0$$

$$i = \frac{1}{2}B_1P(2\lambda x - x^2) \quad (1.5.2)$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad i_d = \frac{1}{2}B_1P\lambda^2$$

$$y = \frac{1}{6}B_1P(3\lambda x^2 - x^3) \quad (1.5.3)$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad y_d = \frac{1}{3}B_1P\lambda^3$$

$$\underline{DB \text{ 部}}: \quad \lambda \leq x \leq l$$

この部分の中で， DC 部の B は B_1 で， CB 部のは B_2 であるが，梁は曲がらずに直線となり， D 点を通り傾斜が i_d となる。

$$M = 0 \quad (1.5.4)$$

$$i = i_d = \frac{1}{2}B_1P\lambda^2 \quad (\text{定数}) \quad (1.5.5)$$

$$y = y_d + i_dx = \frac{1}{6}B_1P\lambda^2(3x - \lambda) \quad (1.5.6)$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad y_d = \frac{1}{3}B_1P\lambda^3$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{12}B_1P\lambda^2(3l - 2\lambda)$$

$$B \text{ 点}: \quad x=l, \quad y_b = \frac{1}{6}B_1P\lambda^2(3l - \lambda)$$

〔1. 6〕片持ち梁： 左端固定， CB 間の点 D に集中荷重 P が作用 $AD = \lambda, \quad \frac{1}{2}l \leq \lambda \leq l$

$$\underline{AC \text{ 部}}: \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = P(\lambda - x) \quad (1.6.1)$$

$$A \text{ 点}: \quad x=0, \quad M_a = P\lambda$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = \frac{1}{2}P(2\lambda - l)$$

$$i = \frac{1}{2}B_1P(2\lambda x - x^2) \quad (1.6.2)$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{8}B_1Pl(4\lambda - l)$$

$$y = \frac{1}{6}B_1Px^2(3\lambda - x) \quad (1.6.3)$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{48}B_1Pl^2(6\lambda - l)$$

$$\underline{CD \text{ 部}}: \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq \lambda$$

$$M = P(\lambda - x) \quad (1.6.4)$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad M_d = 0$$

$$i = \frac{1}{8}B_1P[(n-1)(l-4\lambda)l + 4nx(2\lambda - x)] \quad (1.6.5)$$

$$D \text{ 点}: \quad x=\lambda, \quad i_d = \frac{1}{8}B_1P[(n-1)(l-4\lambda)l + 4n\lambda^2]$$

ここで $\lambda = \frac{1}{2}l$ とおけば， $i'_d = \frac{1}{8}B_1Pl^2$ となり，

〔14〕の i_c と同じになる。

$$y = \frac{1}{24}B_1P[3(n-1)(l-4\lambda)lx + 4n(3\lambda - x)x^2 - (n-1)(l-3\lambda)l^2] \quad (1.6.6)$$

$$C \text{ 点}: \quad x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{48}B_1Pl^2(6\lambda - l)$$

これは AC 部で求めた結果と同じであるが、さらにこの式で $\lambda = \frac{1}{2}l$ とおけば $y'_c = \frac{1}{24}B_1Pl^3$ となり、これは [1.4] での y_c と一致するが、当然である。

$$D \text{ 点: } x = \lambda, y_d = \frac{1}{24}B_1P[(n-1)(6\lambda l - 12\lambda^2 - l^2)l + 8n\lambda^3]$$

ここで $\lambda = l$ とおけば、 $y'_d = \frac{1}{24}(n+7)B_1Pl^3$ となつて、これは [1.1] の y_b と一致する。

$$DB \text{ 部: } \frac{1}{2}l \leq \lambda \leq x \leq l$$

この部分は曲げモーメントが作用しないので、梁のたわみは D 点を通り、傾斜が i_d の直線で表わせる。

$$M = 0 \quad (1.6.7)$$

$$i = i_d = \frac{1}{8}B_1P[(n-1)(l-4\lambda)l + 4n\lambda^2] \quad (1.6.8)$$

$$y = y_d + i_d(x - \lambda) \quad (1.6.9)$$

[1.7] 片持ち梁： 左端固定，等分布荷重 w がスパン全長 l に作用 全荷重： $W = wl$

$$AC \text{ 部: } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = \frac{1}{2}w(l-x)^2 \quad (1.7.1)$$

$$A \text{ 点: } x = 0, M_a = \frac{1}{2}wl^2 = \frac{1}{2}Wl$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, M_c = \frac{1}{8}wl^2 = \frac{1}{8}Wl = \frac{1}{4}M_a$$

$$i = \frac{1}{6}B_1wx(3l^2 - 3lx + x^2) \quad (1.7.2)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, i_c = \frac{7}{48}B_1wl^3 = \frac{7}{48}B_1Wl^3$$

$$y = \frac{1}{24}B_1wx^2(6l^2 - 4lx + x^2) \quad (1.7.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, y_c = \frac{17}{384}B_1wl^4 = \frac{17}{384}B_1Wl^4$$

$$CB \text{ 部: } \frac{1}{2}l \leq c \leq l$$

$$M = \frac{1}{2}w(l-x)^2 \quad (1.7.4)$$

$$i = \frac{1}{48}B_1w[7(1-n)l^3 + 8nx(3l^2 - 3lx + x^2)] \quad (1.7.5)$$

$$B \text{ 点: } x = l, i_b = \frac{1}{48}(n+7)B_1wl^3$$

$$y = \frac{1}{384}B_1w[(n-1)(11l - 56x)l^3 + 16nx^2(6l^2 - 4lx + x^2)] \quad (1.7.6)$$

$$B \text{ 点: } x = l, y_b = \frac{1}{128}(n+15)B_1wl^4$$

[1.8] 片持ち梁： 左端固定，等分布荷重 w がスパン

の左半分に作用 全荷重 $= \frac{1}{2}wl$

$$AC \text{ 部: } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = \frac{1}{8}w(l-2x)^2 \quad (1.8.1)$$

$$A \text{ 点: } x = 0, M_a = \frac{1}{8}wl^2, C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, M_c = 0$$

$$i = \frac{1}{24}B_1wx(3l^2 - 6lx + 4x^2) \quad (1.8.2)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, i_c = \frac{1}{48}B_1wl^3$$

$$y = \frac{1}{48}B_1wx^2(3l^2 - 4lx + 2x^2) \quad (1.8.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, y_c = \frac{1}{128}B_1wl^4$$

$$CB \text{ 部: } \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = 0 \quad (1.8.4)$$

$$i = \frac{1}{48}B_1wl^3 \text{ (定数)} \quad (1.8.5)$$

$$y = \frac{1}{384}B_1wl^3(8x - l) \quad (1.8.6)$$

$$B \text{ 点: } x = l, y_b = \frac{7}{384}B_1wl^4 = 2\frac{1}{3}y_c$$

CB 部の各量に n の影響はない。

[1.9] 片持ち梁： 左端固定，等分布荷重 w がスパンの右半分に作用 全荷重 $= \frac{1}{2}wl$

$$AC \text{ 部: } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = \frac{1}{8}wl(3l-4x) \quad (1.9.1)$$

$$A \text{ 点: } x = 0, M_a = \frac{3}{8}wl^2,$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, M_c = \frac{1}{8}wl^2$$

$$i = \frac{1}{8}B_1wlx(3l-2x) \quad (1.9.2)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, i_c = \frac{1}{8}B_1wl^3$$

$$y = \frac{1}{48}B_1wlx^2(9l-4x) \quad (1.9.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, y_c = \frac{7}{192}B_1wl^4$$

$$CB \text{ 部: } \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = \frac{1}{2}w(l-x)^2 \quad (1.9.4)$$

$$B \text{ 点: } x = l, M_b = 0$$

$$i = \frac{1}{48}B_1w[(6-7n)l^3 + 8nx(3l^2 - 3lx + x^2)]$$

$$(1.9.5)$$

$$B点: x=l, i_b=\frac{1}{48}(n+6)B_1wl^3$$

$$y=\frac{1}{348}B_1w[(11n-10)l^4-8(7n-6)l^3x$$

$$+16nx^2(6l^2-4lx+x^2)] \quad (1.9.6)$$

$$B点: x=l, y_b=\frac{1}{384}(3n+38)B_1wl^4$$

以上〔1.8〕と〔1.9〕で求めた諸量をそれぞれ重ね合わせると〔1.7〕の諸量を示す式と同じになる。

これまでに記した各種の負荷条件に対し、この段付き梁の自由端Bがたわむ量を比較するため、次のように式を変形し、それぞれの場合における Y_b を n について計算してみた。

$$〔1.1〕 Y_b=y_b \div B_1Pl^3=\frac{1}{24}(n+7)$$

$$〔1.2〕 Y_b=y_b \div B_1Ql^3=\frac{1}{12}(n+1)$$

$$〔1.3〕 Y_b=y_b \div B_1M_0l^2=\frac{1}{8}(n+3)$$

$$〔1.4〕 Y_b=y_b \div B_1Pl^3=\frac{5}{48}=0.1041\dot{6}$$

$$〔1.7〕 Y_b=y_b \div B_1wl^4=\frac{1}{128}(n+15)$$

$$〔1.8〕 Y_b=y_b \div B_1wl^4=\frac{7}{384}=0.01822 \ 91\dot{6}$$

$$〔1.9〕 Y_b=y_b \div B_1wl^4=\frac{1}{384}(3n+38)$$

表1 Y_b の 値

n	〔1. 1〕	〔1. 2〕	〔1. 3〕	〔1. 7〕	〔1. 9〕
1	0.3	0.16	0.50	0.125	0.10677
2	0.3750	0.250	0.625	0.13281	0.11458
3	0.416	0.3	0.750	0.14063	0.12240
4	0.4583	0.416	0.875	0.14844	0.13021
5	0.50	0.50	1.0	0.15625	0.13802

この表で〔1.5〕と〔1.6〕の場合を除外したのは、 λ の値によって Y_b が変動するからであり、〔1.4〕と〔1.8〕の場合が書いてないのは、 Y_b は n の値に関係せずこの表の前に書いた式のように定数となるからである。

〔2. 1〕 単純梁： 両端支持、左端にモーメント M_1 が作用 左端反力： $R_a=-R_b$

右端反力： $R_b=P=M_1 \div l, M_1=Pl$ (P は上向き)

$$AC部: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M=-P(l-x)=-M_1+Px \quad (2.1.1)$$

$$A点: x=0, M_a=-Pl=-M_1$$

$$C点: x=\frac{1}{2}l, M_c=-\frac{1}{2}Pl=-\frac{1}{2}M_1$$

$$i=\frac{1}{24}B_1P[(n+7)l^2-24lx+12x^2] \quad (2.1.2)$$

$$A点: x=0, i_a=\frac{1}{24}(n+7)B_1Pl^2$$

$$C点: x=\frac{1}{2}l, i_c=\frac{1}{24}(n-2)B_1Pl^2$$

$$y=\frac{1}{24}B_1Px[(n+7)l^2-12lx+4x^2] \quad (2.1.3)$$

$$C点: x=\frac{1}{2}l, y_c=\frac{1}{48}(n+2)B_1Pl^3$$

最大たわみ： $n=2$ のとき $i_c=0$ となり、 $n \leq 2$ のときに、 y_{max} は AC 部の内に発生する。(2.1.2)式で $i=0$ とおけば y_{max} の値と発生位置 X がわかる。

$$X=\frac{x}{l}=1-\sqrt{\frac{5-n}{12}}$$

$$Y_{max}=y_{max} \div B_1Pl^3$$

$$=\frac{1}{24}(n+7-12X+4X^2)X$$

$$CB部: \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M=-P(l-x) \quad (2.1.4)$$

$$B点: x=l, M_b=0$$

$$i=\frac{1}{12}B_1P[(5n-1)l^2-12nlx+6nx^2] \quad (2.1.5)$$

$$B点: x=l, i_b=-\frac{1}{12}(n+1)B_1Pl^2$$

$$y=\frac{1}{12}B_1P[(1-n)l^3+(5n-1)l^2x$$

$$-6nlx^2+2nx^3] \quad (2.1.6)$$

$$B点: x=l, y_b=0$$

これ等の諸式は、〔1.1〕で求めた弾性曲線の水平軸を移動し、片持ち梁の両端を結ぶ直線 AB を新しい水平軸とした諸量の式と同じになる。具体的には〔1.1〕の諸量と直線 AB のそれとを差し引いた(いわば負の重ね合わせをした)ことになる。

表2

n	X	Y_{max}
1	0.42265	0.06415
2	0.50	0.083
3	0.52860	0.10476
4	0.54356	0.12679
5	0.55279	0.14907

最大たわみ： (2.1.5)

式で、 $i=0$ とおけば、

y_{max} の発生位置は

$$X=\frac{x}{l}=1-\sqrt{\frac{n+1}{6n}}$$

$n < 2$ の場合には $X < 0.5$

となるから、 CB 部に発生させるためには $n \geq 2$ の場合について計算し、それを用いて次式により最大たわみを計算した。

$$Y_{max}=y_{max} \div B_1Pl^3$$

$$=\frac{1}{12}[1-n+(5n-1)X-6nX^2+2nX^3]$$

〔2. 2〕 単純梁： 両端支持、右端にモーメント M_2 が作用 左端反力： $R_a=M_2 \div l=Q, M_2=Ql$

右端反力： $R_b=-R_a=-Q$ (Q は上向きの力)

$$AC部: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M=-Qx \quad (2.2.1)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{2}Ql = -\frac{1}{2}M_2$$

$$i = \frac{1}{12}B_1Q[(n+1)l^2 - 6x^2] \quad (2.2.2)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad i_a = \frac{1}{12}(n+1)B_1Ql^2$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{24}(2n-1)B_1Ql^2$$

$$y = \frac{1}{12}B_1Qx[(n+1)l^2 - 2x^2] \quad (2.2.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{48}(2n+1)B_1Ql^3$$

この部分に最大たわみが発生するのは、 i_c の式から $n \leq 0.5$ の場合であることがわかる。

$$\underline{CB \text{ 部: }} \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = -Qx \quad (2.2.4)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad M_b = -Ql = -M_2$$

$$i = \frac{1}{24}B_1Q[(5n-1)l^2 - 12nx^2] \quad (2.2.5)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad i_b = -\frac{1}{24}(7n+1)B_1Ql^2$$

$$y = \frac{1}{24}B_1Q(l-x)[(1-n)l^2 + 4nlx + 4nx^2] \quad (2.2.6)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad y_b=0$$

表 3

n	X	Y_{max}
1	0.57735	0.06415
2	0.61237	0.11143
3	0.62361	0.15918
4	0.62915	0.20705
5	0.63246	0.25497

最大たわみ： 発生位置を知るため、 $i=0$ とお

けば

$$X = \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{5n-1}{12n}}$$

$$Y_{max} = y_{max} + B_1Ql^3 = \frac{1}{24}(1-X)(1-n + 4nX + 4nX^2)$$

この2式から計算により、表3を得た。

〔2.3〕単純梁： 両端支持、純粋彎曲（モーメント M_0 が両端から作用） 反力： $R_a=0, R_b=0$

この場合の解決法は、いく通りもある。(i) 積分法によるか、(ii) 〔1.3〕で弾性曲線の両端を結ぶ直線 AB を水平軸とするように、重ね合わせ法により式を立て直すか、(iii) 〔2.1〕で $M_1=M_0$ 、〔2.2〕で $M_2=M_0$ とおいて重ね合わせてもよい。

$$\underline{AC \text{ 部: }} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = -\frac{M_0}{l}(l-x) - \frac{M_0}{l}x = -M_0 \quad (\text{定数}) \quad (2.3.1)$$

$$i = \frac{1}{8}B_1M_0[(n+3)l - 8x] \quad (2.3.2)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad i_a = \frac{1}{8}(n+3)B_1M_0l$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{8}(n-1)B_1M_0l$$

$$y = \frac{1}{8}B_1M_0[(n+3)lx - 4x^2] \quad (2.3.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{16}(n+1)B_1M_0l^2$$

最大たわみ： i_c の式から $n \leq 1$ のとき、 y_{max} は AC 部に発生することがわかる。

$$\underline{CB \text{ 部: }} \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = -M_0 \quad (\text{定数}) \quad (2.3.4)$$

$$i = \frac{1}{8}B_1M_0[(5n-1)l - 8nx] \quad (2.3.5)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad i_b = -\frac{1}{8}(3n+1)B_1M_0l$$

$$y = \frac{1}{8}B_1M_0[(1-n)l^2 + (5n-1)lx - 4nx^2] \quad (2.3.6)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad y_b=0$$

表 4

n	X	Y_{max}
1	0.50	0.1250
2	0.5625	0.19141
3	0.583	0.26042
4	0.59375	0.33008
5	0.60	0.40

最大たわみ： $i=0$ とおいて発生位置 X を求める

$$X = \frac{x}{l} = \frac{5n-1}{8n}$$

これを (2.3.6) 式に入れたと

$$\begin{aligned} Y_{max} &= y_{max} + B_1M_0l^2 \\ &= \frac{1}{8}[1-n + (5n-1)X - 4nX^2] \\ &= \frac{1}{128n}(3n+1)^2 \end{aligned}$$

〔2.4〕単純梁： 両端支持、中央 C に集中荷重 W

が作用 反力： $R_a=R_b=\frac{1}{2}W$

$$\underline{AC \text{ 部: }} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = -\frac{1}{2}Wx \quad (2.4.1)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad M_a=0,$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{4}Wl$$

$$i = \frac{1}{48}B_1W[(n+2)l^2 - 12x^2] \quad (2.4.2)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad i_a = \frac{1}{48}(n+2)B_1Wl^2$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{48}(n-1)B_1Wl^2$$

$$y = \frac{1}{48}B_1Wx[(n+2)l^2 - 4x^2] \quad (2.4.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{96}(n+1)B_1Wl^3$$

CB 部: $\frac{1}{2}l \leq x \leq l$

$$M = -\frac{1}{2}W(l-x) \quad (2.4.4)$$

B 点: $x=l, M_b=0$

$$i = \frac{1}{48}B_1W[(10n-1)l^2 - 12nx(2l-x)] \quad (2.4.5)$$

B 点: $x=l, i_b = -\frac{1}{48}(2n+1)B_1Wl^2$

$$y = \frac{1}{48}B_1W[(1-2n)l^3 + (10n-1)l^2x - 4nx^2(3l-x)] \quad (2.4.6)$$

B 点: $x=l, y_b=0$

表 5

n	X	Y_{max}
1	0.50	0.02083
2	0.54356	0.03170
3	0.55904	0.04287
4	0.56699	0.05413
5	0.57183	0.06542

最大たわみ: $i=0$ において発生位置を求める。

$$X = \frac{x}{l} = 1 - \sqrt{\frac{2n+1}{12n}}$$

$$Y_{max} = y_{max} + B_1Wl^2$$

$$= \frac{1}{48}[1-2n+(10n-1)X-4n(3-X)X^2]$$

[2.5] 単純梁: 両端支持, 集中荷重 W が AC 部の内の D 点に作用 $AD=\lambda, 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}l$

$$\text{反力: } R_a = \frac{1}{l}W(l-\lambda), R_b = \frac{1}{l}W\lambda$$

AD 部: $0 \leq x \leq \lambda$

$$M = -R_ax = -\frac{1}{l}W(l-\lambda)x \quad (2.5.1)$$

A 点: $x=0, M_a=0,$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, M_d = -\frac{1}{l}W(l-\lambda)\lambda$$

$$i = \frac{1}{24l}B_1W[(n+7)l^2\lambda - 12l\lambda^2 + 4\lambda^3 - 12(l-\lambda)x^2] \quad (2.5.2)$$

$$A \text{ 点: } x=0, i_a = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(n+7)l^2 - 12l\lambda + 4\lambda^2]$$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, i_d = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(n+7)l^2 - 24l\lambda + 16\lambda^2]$$

もしここで D 点が C 点に来れば, $\lambda = \frac{1}{2}l$ となり

$$i_d' = \frac{1}{48}(n-1)B_1Wl^2$$

となり, [2.4] のときの i_c の式と一致する。

$$y = \frac{1}{24l}B_1Wx[(n+7)l^2\lambda - 12l\lambda^2 + 4\lambda^3 - 4(l-\lambda)x^2] \quad (2.5.3)$$

A 点: $x=0, y_a=0$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, y_d = \frac{1}{24l}B_1W\lambda^2[(n+7)l^2 - 16l\lambda + 8\lambda^2]$$

もしここで D 点が C 点に来れば, $\lambda = \frac{1}{2}l$ となり

$$y_d' = \frac{1}{96}(n+1)B_1Wl^3$$

となり, これは [2.4] における y_c の式と一致する。

DC 部: $\lambda \leq x \leq \frac{1}{2}l$

$$M = -R_ax + W(x-\lambda) = -\frac{1}{l}W\lambda(l-x) \quad (2.5.4)$$

C 点: $x=\frac{1}{2}l, M_c = -\frac{1}{2}W\lambda$

$$i = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(n+7)l^2 + 4\lambda^2 - 12x(2l-x)] \quad (2.5.5)$$

C 点: $x=\frac{1}{2}l, i_c = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(n-2)l^2 + 4\lambda^2]$

$$y = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(n+7)l^2x - 4\lambda^2(l-x) - 4x^2(3l-x)] \quad (2.5.6)$$

C 点: $x=\frac{1}{2}l, y_c = \frac{1}{48}B_1W\lambda[(n+2)l^2 - 4\lambda^2]$

ここで $\lambda = \frac{1}{2}l$ とおき, 集中荷重が C 点に作用する場合とすれば, $y_c' = \frac{1}{96}(n+1)B_1Wl^3$ となり, [2.4]

の y_c の式と同じになる。

CB 部: $\frac{1}{2}l \leq x \leq l$

$$M = -R_ax + M(x-\lambda) = -\frac{1}{l}W\lambda(l-x) \quad (2.5.7)$$

B 点: $x=l, M_b=0$

$$i = \frac{1}{12l}B_1W\lambda[(5n-1)l^2 - 6nx(2l-x) + 2\lambda^2] \quad (2.5.8)$$

B 点: $x=l, i_b = -\frac{1}{12l}B_1W\lambda[(n+1)l^2 - 2\lambda^2]$

もし $\lambda = \frac{1}{2}l$ とおけば, 荷重が C 点に来たときとなり,

$$i_b' = -\frac{1}{48}(2n+1)B_1Wl^2 \text{ となり, [2.4] における } i_b \text{ と一致する}$$

$$y = \frac{1}{12l}B_1W\lambda[(1-n)l^3 + (5n-1)l^2x - 2\lambda^2(l-x) - 2nx^2(3l-x)] \quad (2.5.9)$$

B 点: $x=l, y_b=0$

[2.6] 単純梁: 両端支持, 集中荷重 W が CB 部の内の D 点に作用

これまでに取扱った場合とちがひ、梁を裏返し的位置に置いたとして B 端を座標原点とすれば、式の形は簡単になる。 $BD = \lambda$, $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}l$

$$\text{反力: } R_a = \frac{1}{l}W\lambda, \quad R_b = \frac{1}{l}W(l-\lambda)$$

BD 部: $0 \leq x \leq \lambda$

$$M = -R_b x = -\frac{1}{l}W(l-\lambda)x \quad (2.6.1)$$

B 点: $x=0$, $M_b=0$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, \quad M_d = -\frac{1}{l}W(l-\lambda)\lambda$$

$$i = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(7n+1)l^2\lambda - 4n\lambda^2(3l-\lambda) - 12n(l-\lambda)x^2] \quad (2.6.2)$$

$$B \text{ 点: } x=0, \quad i_b = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(7n+1)l^2 - 12n\lambda + 4n\lambda^2]$$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, \quad i_d = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(7n+1)l^2 - 24n\lambda + 16n\lambda^2]$$

$$y = \frac{1}{24l}B_1Wx[(7n+1)l^2\lambda - 4n\lambda^2(3l-\lambda) - 4n(l-\lambda)x^2] \quad (2.6.3)$$

$$D \text{ 点: } x=\lambda, \quad y_d = \frac{1}{24l}B_1W\lambda^2[(7n+1)l^2 - 16n\lambda + 8n\lambda^2]$$

DC 部: $\lambda \leq x \leq \frac{1}{2}l$

$$M = -R_b x + W(x-\lambda) = -\frac{1}{l}W\lambda(l-x) \quad (2.6.4)$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{2}W\lambda$$

$$i = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(7n+1)l^2 + 4n\lambda^2 - 12nx(2l-x)] \quad (2.6.5)$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(1-2n)l^2 + 4n\lambda^2]$$

$$y = \frac{1}{24l}B_1W\lambda[(7n+1)l^2x - 4nx(3lx-\lambda^2) - 4n(l\lambda^2-x^2)] \quad (2.6.6)$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{48}B_1W\lambda[(2n+1)l^2 - 4n\lambda^2]$$

CA 部: $\frac{1}{2}l \leq x \leq l$

$$M = -R_b x + W(x-\lambda) = -\frac{1}{l}W\lambda(l-x) \quad (2.6.7)$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{2}W\lambda, \quad A \text{ 点: } x=l, \quad M_a=0$$

$$i = \frac{1}{12l}B_1W\lambda[(5-n)l^2 - 6x(2l-x) + 2n\lambda^2] \quad (2.6.8)$$

$$A \text{ 点: } x=l, \quad i_a = -\frac{1}{12l}B_1W\lambda[(n+1)l^2 - 2n\lambda^2]$$

$$y = \frac{1}{12l}B_1W\lambda[(n-1)l^3 + (5-n)l^2x - 6lx^2 - 2n\lambda^2(l-x) + 2x^3] \quad (2.6.9)$$

$$A \text{ 点: } x=l, \quad y_a=0$$

〔2.7〕単純梁: 両端支持, 等分布荷重 w がスパン全体に作用 全荷重: wl , 反力: $R_a=R_b=\frac{1}{2}wl$

AC 部: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$

$$M = -R_a x + \frac{1}{2}wx^2 = -\frac{1}{2}wx(l-x) \quad (2.7.1)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad M_a=0,$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{8}wl^2$$

$$i = \frac{1}{384}B_1w[(5n+1)l^3 - 96lx^2 + 64x^3] \quad (2.7.2)$$

$$A \text{ 点: } x=0, \quad i_a = \frac{1}{384}(5n+1)B_1wl^3$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{5}{384}(n-1)B_1wl^3$$

$$y = \frac{1}{384}B_1w[(5n+1)l^3x - 16x^3(2l-x)] \quad (2.7.3)$$

$$C \text{ 点: } x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{5}{768}(n+1)B_1wl^4$$

CB 部: $\frac{1}{2}l \leq x \leq l$

$$M = -\frac{1}{2}wx(l-x) \quad (2.7.4)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad M_b=0$$

$$i = \frac{1}{384}B_1w[(21n-5)l^3 - 96nlx^2 + 64nx^3] \quad (2.7.5)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad i_b = -\frac{1}{384}(11n+5)B_1wl^3$$

$$y = \frac{1}{384}B_1w[5(1-n)l^4 + (21n-5)l^3x - 16nx^3(2l-x)] \quad (2.7.6)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad y_b=0$$

表 6

n	X	Y_{max}
1	0.50	0.01302
2	0.55227	0.01987
3	0.56990	0.02695
4	0.57878	0.03408
5	0.58413	0.04124

最大たわみ: 発生位置を求めるためには, (2.7.5) 式で $i=0$ とおき, $X=x+l$ として

$$64nX^3 - 96nX^2 + 21n - 5 = 0$$

の式を解いて (2.7.6) 式

により Y_{max} の値を計算した。

$$Y_{max} = y_{max} + B_1 w l^4 \\ = \frac{1}{384} [16nX^4 - 32nX^3 \\ + (21n-5)X - 5(n-1)]$$

〔2. 8〕単純梁： 両端支持，等分布荷重 w がスパンの左半分に作用 全荷重： $\frac{1}{2}wl$

$$\text{反力： } R_a = \frac{3}{8}wl, \quad R_b = \frac{1}{8}wl$$

$$\text{AC 部： } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ M = -\frac{1}{8}wx(3l-4x) \quad (2.8.1)$$

$$A \text{ 点： } x=0, \quad M_a=0$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{16}wl^2 \\ i = \frac{1}{384} B_1 w [(2n+7)l^3 - 72lx^2 + 64x^3] \quad (2.8.2)$$

$$A \text{ 点： } x=0, \quad i_a = \frac{1}{384} (2n+7) B_1 w l^3$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{384} (2n-3) B_1 w l^3 \\ y = \frac{1}{384} B_1 w [(2n+7)l^3 x - 24lx^3 + 16x^4] \quad (2.8.3)$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{768} (2n+3) B_1 w l^4$$

最大たわみ： これが C 点に発生するのは， $i_c=0$ のときで $n=1.5$ の場合である。それゆえ $n=1$ のとき Y_{max} は AC 部に発生する。発生位置 X については，(2.8.2) の式で $i=0$ と $n=1$ を入れ， $64X^3 - 72X^2 + 5=0$ の式から X を求め，それを (2.8.3) 式に入れて $n=1$ のとき

$$Y_{max} = y_{max} + B_1 w l^4 = \frac{1}{384} (16X^4 - 24X^3 + 9X)$$

を計算し，後表の上段に示してある。

$$\text{CB 部： } \frac{1}{2}l \leq x \leq l \\ M = -\frac{1}{8}wl(l-x) \quad (2.8.4)$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{16}wl^2, \quad B \text{ 点： } x=l, \quad M_b=0 \\ i = \frac{1}{384} B_1 w [(20n-3)l^2 - 48nlx + 24nx^2] \quad (2.8.5)$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{384} (2n-3) B_1 w l^3$$

$$B \text{ 点： } x=l, \quad i_b = -\frac{1}{384} (4n+3) B_1 w l^3 \\ y = \frac{1}{384} B_1 w [(3-4n)l^3 \\ + (20n-3)l^2x - 24nlx^2 + 8x^3] \quad (2.8.6)$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{768} (2n+3) B_1 w l^4$$

$$B \text{ 点： } x=l, \quad y_b=0$$

表 7

n	X	Y_{max}
1	0.30952	0.00578
2	0.52129	0.00914
3	0.54356	0.01189
4	0.55512	0.01467
5	0.56220	0.01748

最大たわみ： $n=2, 3, 4, 5$ のとき発生位置 X は (2.8.5) 式で $i=0$ とおき， $24nX^2 - 48nX + 20n - 3 = 0$ を解き，その値を (2.8.6) 式に入れて

$$Y_{max} = y_{max} + B_1 w l^4 \\ = 8X^3 - 24nX^2 + (20n-3)X - 4n + 3$$

を計算した。これと AC 部の $n=1$ の場合の結果とを表記してみた。

〔2. 9〕単純梁： 両端支持，等分布荷重 w がスパンの右半分に作用 全荷重： $\frac{1}{2}wl$

$$\text{反力： } R_a = \frac{1}{8}wl, \quad R_b = \frac{3}{8}wl$$

$$\text{AC 部： } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ M = -R_a x = -\frac{1}{8}wlx \quad (2.9.1)$$

$$A \text{ 点： } x=0, \quad M_a=0,$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{1}{16}wl^2 \\ i = \frac{1}{384} B_1 w [(3n+4)l^3 - 24lx^2] \quad (2.9.2)$$

$$A \text{ 点： } x=0, \quad i_a = \frac{1}{384} (3n+4) B_1 w l^3$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{1}{384} (3n-2) B_1 w l^3 \\ y = \frac{1}{384} B_1 w [(3n+4)l^3 x - 8lx^3] \quad (2.9.3)$$

$$A \text{ 点： } x=0, \quad y_a=0$$

$$C \text{ 点： } x=\frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{1}{768} (3n+2) B_1 w l^4$$

$$\text{CB 部： } \frac{1}{2}l \leq x \leq l \\ M = \frac{1}{8}w(l^2 - 5lx + 4x^2) \quad (2.9.4)$$

$$B \text{ 点： } x=l, \quad M_b=0 \\ i = \frac{1}{384} B_1 w [(n-2)l^3 + 48nl^2x - 120nlx^2 \\ + 64nx^3] \quad (2.9.5)$$

$$B \text{ 点： } x=l, \quad i_b = -\frac{1}{384} (7n+2) B_1 w l^3 \\ y = \frac{1}{384} B_1 w [(2-n)l^4 + (n-2)l^3x + 24nl^2x^2 \\ - 40nlx^3 + 16nx^4] \quad (2.9.6)$$

$$B \text{ 点： } x=l, \quad y_b=0$$

表 8

n	X	Y_{max}
1	0.50	0.00651
2	0.57846	0.01083
3	0.59096	0.01517
4	0.59717	0.01952
5	0.60089	0.02388

$$Y_{max} = y_{max} \div B_1 W l^4$$

$$= \frac{1}{384} [16X^4 - 40nX^3 + 24nX^2$$

$$+ (n-2)(X-1)]$$

[3. 1] 特殊梁： 左端固定，右端支持，中央集中荷重 W が作用 $i_a=0, y_a=y_b=0$

右端反力： $R_b = P = \frac{5}{2(n+7)}W$

AC 部： $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$

$$M = -\frac{1}{2(n+7)}W[(n+2)l - (2n+9)x]$$

(3. 1. 1)

A 点： $x=0, M_a = \frac{n+2}{2(n+7)}Wl$

C 点： $x=\frac{1}{2}l, M_c = -\frac{5}{4(n+7)}Wl$

うねりの境目： $M=0$ の位置， $x = \frac{n+2}{2n+9}l$

$$i = \frac{1}{4(n+7)}B_1 W x [2(n+2)l - (2n+9)x]$$

(3. 1. 2)

A 点： $x=0, i_a=0$

C 点： $x=\frac{1}{2}l, i_c = \frac{2n-1}{16(n+7)}B_1 W l^2$

$$y = \frac{1}{12(n+7)}B_1 W x^2 [3(n+2)l - (2n+9)x]$$

(3. 1. 3)

A 点： $x=0, y_a=0$

C 点： $x=\frac{1}{2}l, y_c = \frac{4n+3}{96(n+7)}B_1 W l^3$

CB 部： $\frac{1}{2}l \leq x \leq l$

$$M = -\frac{5}{2(n+7)}W(l-x)$$

(3. 1. 4)

B 点： $x=l, M_b=0$

$$i = \frac{1}{16(n+7)}B_1 W [(17n-1)l^2 - 20nx(2l-x)]$$

(3. 1. 5)

B 点： $x=l, i_b = -\frac{3n+1}{16(n+7)}B_1 W l^2$

$$y = \frac{1}{48(n+7)}B_1 W [(3-11n)l^3$$

$$+ (51n-3)l^2x - 20nx^2(3l-x)]$$

(3. 1. 6)

B 点： $x=l, y_b=0$

表 9

n	X	Y_{max}
1	0.55279	0.00931
2	0.58167	0.01355
3	0.59175	0.01701
4	0.59689	0.01985
5	0.60	0.02

$$Y_{max} = y_{max} \div B_1 W l^8$$

$$= \frac{1}{48(n+7)} [20nX^3 - 60nX^2$$

$$+ (51n-3)X - 11n + 3]$$

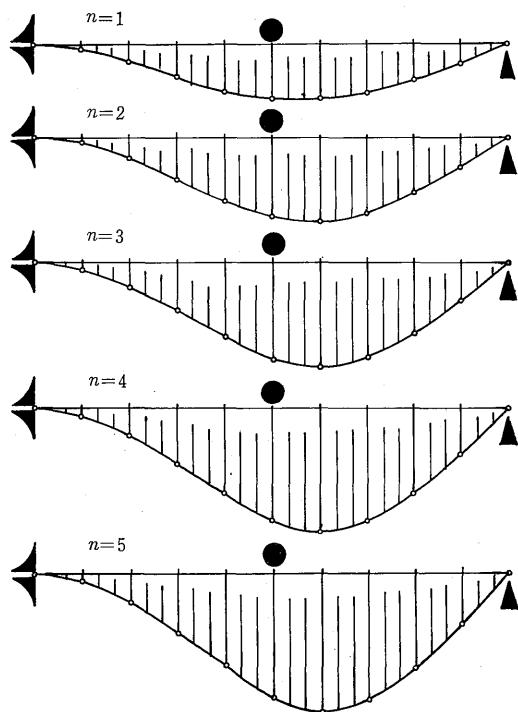
最大たわみ： (3.1.5)式
で $i=0$ とおけば，発生
位置 X が知れる。

$$20nX^2 - 40nX + 17n$$

$-1=0$ の式から

$$X = 1 - \sqrt{\frac{3n+1}{20n}}$$

第 1 図 はこの梁の弾性曲線の AC 部を (3.1.3) 式で，CB 部を (3.1.6) 式から計算し図示したものである。これにより n が弾性曲線に及ぼす影響がわかる。



第 1 図

[3. 2] 特殊梁： 右端固定，左端支持，中央集中荷重 W が作用 $i_b=0, y_a=y_b=0$

左端反力： $R_a = Q = \frac{5n}{2(7n+1)}W$

AC 部： $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$

$$M = -\frac{5n}{2(7n+1)}Wx$$

(3. 2. 1)

A 点： $x=0, M_a=0$

C 点： $x=\frac{1}{2}l, M_c = -\frac{5n}{4(7n+1)}Wl$

$$i = \frac{n}{16(7n+1)} B_1 W [(n+3)l^2 - 20x^2] \quad (3.2.2)$$

$$A点: \quad x=0, \quad i_a = \frac{n(n+3)}{16(7n+1)} B_1 W l^2$$

$$C点: \quad x = \frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{n(n-2)}{16(7n+1)} B_1 W l^2$$

$$y = \frac{n}{48(7n+1)} B_1 W x [3(n+3)l^2 - 20x^2] \quad (3.2.3)$$

$$A点: \quad x=0, \quad y_a=0$$

$$C点: \quad x = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{n(3n+4)}{96(7n+1)} B_1 W l^3$$

最大たわみ: AC部に発生するのは、 i_c の式から $n \leq 2$ の場合である。この範囲での発生位置は (3.2.2) 式で $i=0$ とおけば

$$X = x \div l = \sqrt{\frac{n+3}{20}}$$

この値を (3.2.3) 式に入れて

$$Y_{max} = y_{max} \div B_1 W l^3 \\ = \frac{n}{48(7n+1)} X [3(n+9) - 20X^2]$$

後に出した表で、 $n=1, 2$ の場合はこれ等の式による計算結果である。

$$CB部: \quad \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = \frac{1}{2(7n+1)} W [(9n+2)x - (7n+1)l] \quad (3.2.4)$$

$$B点: \quad x=l, \quad M_b = \frac{2n+1}{2(7n+1)} W l$$

$$\text{うねりの境目: } M=0 \text{ の位置 } x = \frac{7n+1}{9n+2} l$$

$$i = \frac{n}{4(7n+1)} B_1 W [(9n+2)x^2 \\ - 2(7n+1)lx + 5nl^2] \quad (3.2.5)$$

$$B点: \quad x=l, \quad i_b=0$$

$$y = \frac{n}{12(7n+1)} B_1 W [(9n+2)x^3 \\ - 3(7n+1)lx^2 + 15nl^2x - (3n-1)l^3] \quad (3.2.6)$$

$$B点: \quad x=l, \quad y_b=0$$

表10

n	X	Y_{max}
1	0.44721	0.00931
2	0.50	0.0138
3	0.51724	0.01854
4	0.52632	0.02321
5	0.53191	0.02790

最大たわみ: (3.2.5)式で $i=0$ において発生位置 X は

$$(9n+2)X^2 - 2(7n+1)X + 5n = 0$$

の式を解けばよい。その結果として

$$X = \frac{5n}{9n+2}$$

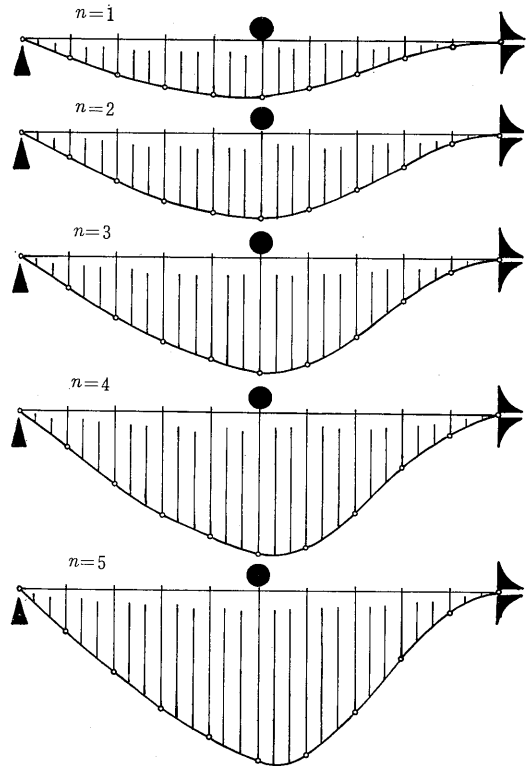
$$Y_{max} = y_{max} \div B_1 W l^3$$

$$= \frac{n}{12(7n+1)} [(9n+2)X^3$$

$$- 3(7n+1)X^2 + 15nX - 3n + 1]$$

となり、この2式から $n=3, 4, 5$ のときの数値が計算できる。

第2図はAC部を (3.2.3) 式で、CB部を (3.2.6) 式で計算したこの場合の梁の弾性曲線を示したものである。〔3.1〕の場合に比して、 n の増大するに従い最大たわみが増大することがわかる。



第2図

〔3.3〕特殊梁: 両端固定、中央集中荷重 W が作用 $i_a=i_b=0, y_a=y_b=0$

$$\text{左端反力: } R_a = \frac{n(n+7)}{n^2+14n+1} W$$

$$\text{右端反力: } R_b = \frac{7n+1}{n^2+14n+1} W$$

$$AC部: \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$$

$$M = \frac{n}{2(n^2+14n+1)} W [(n+3)l - 2(n+7)x] \quad (3.3.1)$$

$$A点: \quad x=0, \quad M_a = \frac{n(n+3)}{2(n^2+14n+1)} W l$$

$$C点: \quad x = \frac{1}{2}l, \quad M_c = -\frac{2n}{n^2+14n+1} W l$$

$$\text{うねりの境目: } M=0 \text{ の位置, } x = \frac{n+3}{2(n+7)} l$$

$$i = \frac{n}{2(n^2+14n+1)} B_1 W x [(n+3)l - (n+7)x] \quad (3.3.2)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad i_c = \frac{n(n-1)}{8(n^2+14n+1)} B_1 W l^2$$

$$y = \frac{n}{12(n^2+14n+1)} B_1 W x^2 [3(n+3)l - 2(n+7)x] \quad (3.3.3)$$

$$C \text{ 点: } x = \frac{1}{2}l, \quad y_c = \frac{n(n+1)}{24(n^2+14n+1)} B_1 W l^3$$

$$CB \text{ 部: } \frac{1}{2}l \leq x \leq l$$

$$M = \frac{1}{2(n^2+14n+1)} W [2(7n+1)x - (11n+1)l] \quad (3.3.4)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad M_b = \frac{3n+1}{2(n^2+14n+1)} W l$$

$$\text{うねりの境目: } M=0 \text{ の位置 } x = \frac{11n+1}{2(7n+1)} l$$

$$i = \frac{n}{2(n^2+14n+1)} B_1 W (l-x) [4nl - (7n+1)x] \quad (3.3.5)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad i_b=0$$

$$y = \frac{n}{12(n^2+14n+1)} B_1 W (l-x)^2 [(1-5n)l + 2(7n+1)x] \quad (3.3.6)$$

$$B \text{ 点: } x=l, \quad y_b=0$$

表11

n	X	Y_{max}
1	0.50	0.00521
2	0.53	0.00770
3	0.54	0.00993
4	0.55172	0.01193
5	0.5	0.01372

$$\therefore X = \frac{4n}{7n+1}$$

$$Y_{max} = y_{max} \div B_1 W l^3$$

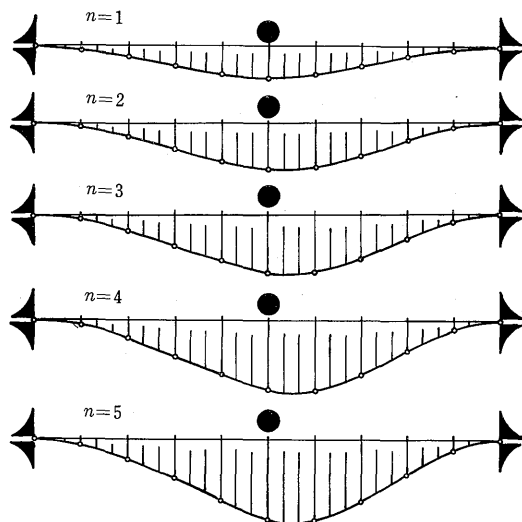
最大たわみ: (3.3.5)の式で $i=0$ とおけば発生位置 X は次の式から求められる。

$$(1-X)[4n - (7n+1)X] = (7n+1)X^2 - (11n+1)X + 4n = 0$$

$$= \frac{n}{12(n^2+14n+1)} (1-X)^2 [2(7n+1)X - 5n+1]$$

この2式から計算して表11を作った。

第3図は AC 部を (3.3.3) 式から, CB 部を (3.3.6) 式で計算し梁の弾性曲線のたわみを図示してある。両端の条件と n の値により曲線の形とたわみ量の相違が各図によって明かにされた。



第 3 図

あとがき この報告の数値計算は、本学備付のアレフ・ゼロとワイル卓上電子計算機によって処理した。3 次方程式の解法には後者に IBM カードを用い、約10秒で近似解を10桁以上を求めることができた。これらの操作は本学助手山村正明氏が、一般に慣用されている近似式よりもさらに詳細な根を見出す式を立て、それによるカードの穿孔によって解を求めてくれた。その内容は本紀要に発表された同氏の論文に記されている。ここに明記して感謝の意を表わす。