

折版の弾性論的研究

片岡靖夫*

The Study of Folded Plate by the Theory of Elasticity

Yasuo KATAOKA

Since 1930, numerous papers have been written on a study of folded plates. But the object of their studies is almost for prismatic shell structures.

In this paper, the writer shows the elastic behavior of uniformly loaded pyramidal folded plates, using the theory of elasticity and point matching method.

§ 1. 序

折版の応力解析は実験、理論共多くの研究が成されている。(1)しかしながら殆んどの研究は角筒折版を対称としたもので、解析方法は一次元化した近似解法が主である。折版の応力状態は、Plate と Plane の弾性理論を用いて解析出来るが、この方法を用いた角筒折版の解析は Pullmano-Lee(2)により成されている。

本論文では角錐折版に関して、Point matching(3)法を用いて応力解析することにする。

角錐折版は三角形板の組合せにより種々の構造空間を構成出来るが、境界条件に関し、三辺同時に厳密に満足させる数学的方法はない。そこで前述のごとく境界上にある有限点境界条件を満足させる方法を用いた。この方法によると、点の数がふえればふえるほど、その解は厳密解に近づく。しかしながら電子計算機の容量の関係でその数は自然と制限を受けることになる。しかしながら

計算結果を検討すると、必ずしも非常に多くの点を取らなくとも、十分の精度を期待出来る。

§ 2. 折版の幾何学的性質

角錐折版で Plate と Plane の相互作用を論ずる時に必要となるのが折版の幾何学的性質である。

ベクトル

$$\vec{CA} = (r_1 \cos \alpha, -r_1 \sin \alpha, -r_1 \tan \beta)$$

$$\vec{CB} = (r_2, 0, 0)$$

$$\cos \theta' = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{r_1 r_2 \cos \alpha \cos \beta}{r_1 r_2} = \cos \alpha \cos \beta \quad (K=0)$$

$$\cos \delta_1 = \frac{2r_2(r_2 - r_1 \cos \alpha)}{2r_2 \sqrt{r_1^2 \sec^2 \beta + r_2^2} - 2r_1 r_2 \cos \alpha}$$

$$\cos \delta_2 = \frac{2r_1(r_1 \sec^2 \beta - r_2 \cos \alpha)}{2r_1 \sec \beta \sqrt{r_1^2 \sec^2 \beta + r_2^2} - 2r_1 r_2 \cos \alpha} \quad (K=0)$$

$K \neq 0$ の時

$$\cos \theta' = \frac{\cos \beta (r_1 r_2 \cos \alpha \cot K - r_1 \tan \beta)}{r_1 \sqrt{r_2^2 \cot^2 K + (r_1 \tan \beta - r_2 \tan K)^2}}$$

r_1, r_2, r_1 単位法線ベクトル

r_1 半径

x, y, z 直角座標

折版境界の角度 r_1

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = n_1 \cdot n_{12}$$

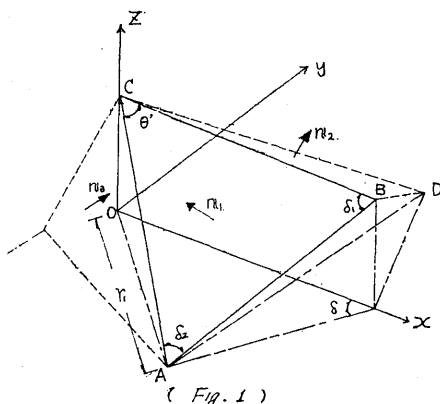
$$= \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}$$

$$\times \sin \alpha$$

$$\sin r_1 = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}$$

$$\cos r_1 = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}$$

折版境界の角度 r_2



* 本学建築学科助手

$$\begin{aligned}\sin \gamma_2 &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \\ &\times (\tan \beta \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ \sin \gamma_2 &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \\ \cos \gamma_2 &= \frac{-\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}\end{aligned}$$

§ 3. 荷重

鉛直荷重を板に直角な成分 P と板に平行な成分 (すなわち、板に平行な物体力) F_x , F_y に分ける。

前に求めた単位法線ベクトルを用いてその荷重を表示すると、

・正角錐折版に関しては

$$\begin{aligned}P &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p} = P \cos \beta \\ F_x &= -P \sin \beta \\ F_y &= 0\end{aligned}$$

・変形角錐折版

$$\begin{aligned}P &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \frac{P \sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \\ F_x &= -\frac{P \sin \beta (r_2 - r_1 \cos \alpha)}{\sqrt{(r_1^2 \sec^2 \beta + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha)(1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)}} \\ F_y &= -\frac{P r_1 \tan \beta}{\sqrt{r_1^2 \sec^2 \beta + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha}}\end{aligned}$$

§ 4. 解析仮定

角錐折版は均一板で等板厚から構成されて、plate と plane の古典理論が適用されると仮定する。外荷重は板の中面に作用し、板の内部では plate と plane が独立に変形及び釣合が成立するものとする。

本論文に扱われる角錐は正角錐であり、底面に沿って完全固定支持する場合とする。また外荷重は一様荷重で、鉛直方向のみ作用している場合を考える。従って各版の稜線に沿っては対称条件が適用され、且つ各版は二等辺三角形となるから左右対称となる。それ故、版の半分に関して応力解析すればよいことになる。折版の幾何学的性質は前述のごとくである。

§ 5. 座標変換

版内の応力状態は plate と plane に関して独立に表示され、本論文では double Suffix を用いて応力及び曲げを表わす。

1. 面内変位

$$\begin{aligned}T_{xx} &= \tau_{xx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ T_{yy} &= \tau_{xy} \cos \theta + \tau_{yy} \sin \theta\end{aligned}$$

$$2(T_n - i T_{ns}) = \tau_{xx} + \tau_{yy} - (\tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i\tau_{xy})e^{2i\theta}$$

2. 面内変位

$$U_n + i U_{ns} = e^{-i\theta} (u + iv)$$

$$u + iv = e^{i\theta} (u_n + i u_{ns})$$

3. モーメント等

$$M_n + M_s = M_{xx} + M_{yy}$$

$$M_s - M_n + 2i M_{ns} = e^{2i\theta} (M_{yy} - M_{xx} + 2i M_{xy})$$

$$Q_n - i Q_s = e^{i\theta} (Q_{xx} - i Q_{yy})$$

$$V_n - i V_s = e^{i\theta} (V_{xx} - i V_{yy}) \cdots \cdots \text{換算剪断力}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = e^{i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

§ 6. 微分演算子の変換

応力及び変位を複素平面にて表示するため、直交デカルト座標の微分演算子を複素変数の微分演算子に変換する。

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$$

複素変数の微分演算子を用いて Airy の応力関数、たわみ関数、応力、モーメント等を表示すると、

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i \tau_{xy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta^2 \omega = 16 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{P}{D}$$

$$M_{xx} + M_{yy} = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$= -D(1 + \nu) 4 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$M_{yy} - M_{xx} + 2i M_{xy} = D(1 - \nu) 4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$Q_{xx} - i Q_{yy} = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$= -D 8 \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}}$$

§ 7. potential 関数の導入

重調和関数 $U(xy)$ は複素数による微分演算子を用いると、

$$2U = z\varphi(z) + \bar{z}\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}$$

一方応力に関しては、

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 2\{\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}\}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi_1''(z) + \chi_1''(z)\}$$

$$= 2\{\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)\}$$

境界に沿って作用する応力の x 方向、 y 方向成分を各々 T_{xx} , T_{yy} とすると Airy の応力関数及び Potential 関数は、

$$i \int (T_{xx} + i T_{yy}) ds = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \varphi_1(z) + \overline{z\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}$$

平面変形状態に於ける変位は、

$$2\mu(u+iv) = \alpha\varphi_1(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}$$

平面応力状態では、

$$2\mu(u+iv) = \alpha^*\varphi(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}$$

ここで $\alpha = (3-4\nu)$, $\alpha^* = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, μ ; Lamé の常数,

変位 (w), 曲げモーメント, 剪断力の表示

$$2DW = \frac{P}{32}z^2\bar{z}^2 + \bar{z}\varphi_2(z) + \overline{z\varphi_2(z)} + \chi_2(z) + \overline{\chi_2(z)}$$

$$M_{xx} + M_{yy} = -\frac{1+\nu}{4}pzz - 2(1+\nu)\{\varphi_2'(z) + \overline{\varphi_2'(\bar{z})}\}$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = \frac{1-\nu}{8}p\bar{z}^2 + 2(1-\nu)\{\bar{z}\varphi_2''(z) + \psi_2'(z)\}$$

$$Q_{xx} - iQ_{yy} = -\frac{p}{z}\bar{z} - 4\varphi_2''(z)$$

$$2\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{p}{16D}z\bar{z}^2 + \frac{1}{D}\{\varphi_2(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_2'(z) + \psi_2(z)\}$$

前述の応力関係式に物体力の影響項を導入するには、
下記の応力釣合方程式より導かれる。

$$\frac{\partial\tau_{xx}^{(*)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}^{(*)}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}^{(*)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}^{(*)}}{\partial y} + F_y = 0$$

故に面内応力は、

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 4R\{\varphi_1'(z)\} - F_{xx} - F_{yy}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi_1'(z) + \psi_1'(z)\} + F_{xx} - F_{yy}$$

次に面内変位は、

$$\frac{\partial u^{(*)}}{\partial x} = -\frac{1}{E}(F_{xx} - \nu F_{yy})$$

$$\frac{\partial v^{(*)}}{\partial y} = -\frac{1}{E}(F_{yy} - \nu F_{xx})$$

$$\partial\varepsilon_{xy}^{(*)} = \frac{\partial v^{(*)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(*)}}{\partial y} = \frac{t_{xy}}{\mu} = 0$$

$$u^{(*)} = -\frac{1}{E}\left(F_x \frac{x^2}{2} - \nu F_y xy\right) + f_1(y)$$

$$v^{(*)} = -\frac{1}{E}\left(F_y \frac{y^2}{2} - \nu F_x xy\right) + f_2(x)$$

$$\frac{\nu}{E}F_x y + f_2'(x) + \frac{\nu}{E}F_y x + f_1'(y) = 0$$

故に $u^{(*)}$, $v^{(*)}$ は次式のごとくなる。

$$u^{(*)} = \frac{-1}{E}\left(F_x \frac{x^2}{2} - \nu F_y xy\right) - \frac{\nu}{2E}F_x y^2$$

$$v^{(*)} = -\frac{1}{E}\left(F_y \frac{y^2}{2} - \nu F_x xy\right) - \frac{\nu}{2E}F_y x^2$$

$$4\mu(u^{(*)} + iv^{(*)})$$

$$= -\frac{1}{H\nu}\{F_x\{(1+\nu)x^2 - \nu(x^2 + 2ixy - y^2)\} + iF_y\{(1+\nu)y^2 + \nu(x^2 + 2ixy + y^2)\}\}$$

従って物体力を導入した面内変位は、

$$2\mu(u+iv) = \alpha\varphi_1(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} - \frac{1}{2(1+\nu)}\left[F_x\left\{\frac{(1+\nu)}{4}(z+\bar{z})^2 - \nu z^2\right\} + iF_y\left\{-\frac{(1+\nu)}{4}(z-\bar{z})^2 + \nu z^2\right\}\right]$$

§ 8. 換算剪断力の表示

$$Q_x = -4D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\bar{z}}\right)$$

$$Q_y = -4D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\bar{z}}\right)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\bar{z}^2}\right)$$

$$V_x - iV_y = -4D\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\bar{z}}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)D(1-\nu)i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\bar{z}^2}\right) = -2D\left\{(5-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} - (1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial\bar{z}^3}\right\}$$

$$2Dw = \frac{P}{64}z\bar{z}(z+\bar{z})^2 + \bar{z}\varphi(z) + \overline{z\varphi_2(z)} + \chi_2(z) + \overline{\chi_2(z)}$$

$$2D\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = \frac{P}{32}(3z+4\bar{z}) + \varphi''(z)$$

$$2D\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{3P}{32}z + \overline{z\varphi_2''(z)} + \overline{\psi_2''(z)}$$

$$V_x - iV_y = \left[-\frac{P}{32}\{12z + (5-\nu)4\bar{z}\} - (5-\nu)\varphi_2''(z) + (1-\nu)\{\overline{z\varphi_2''(z)} + \overline{\psi_2''(z)}\}\right]$$

$$V_n - iV_s = e^{i\theta}(V_x - iV_y)$$

$$V_n = R\{e^{i\theta}(V_x - iV_y)\}$$

剪断力は換算剪断力を用いた方が妥当と思われるが本論文に於いては剪断力を用いて解析した。

前記の応力関数, たわみ関数等は Potential 関数で表示されたが, この場合, Potential 関数は定義領域で正則な関数であるためテーラー展開される。

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n,$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}[A_n^1 \cos(n-1)\theta - A_n^2 \sin(n-1)\theta + i\{A_n^1 \sin(n-1)\theta + A_n^2 \cos(n-1)\theta\}]$$

$$\psi_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}[B_n^1 \cos(n-1)\theta - B_n^2 \sin(n-1)\theta + i\{B_n^1 \sin(n-1)\theta + B_n^2 \cos(n-1)\theta\}]$$

$$\begin{aligned}\phi_1''(z) = & \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^{n-2} \left[A_n^1 \cos(n-2)\theta \right. \\ & - A_n^2 \sin(n-2)\theta + i \{ A_n^1 \sin(n-2)\theta \\ & \left. + A_n^2 \cos(n-2)\theta \} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}\phi_1''(z) = & \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^{n-1} \left[\{ A_n^1 \cos(n-2)\theta \right. \\ & - A_n^2 \sin(n-2)\theta \} \cos \theta \\ & + \{ A_n^1 \sin(n-2)\theta + A_n^2 \cos(n-2)\theta \} \sin \theta \\ & - i \{ \{ A_n^1 \cos(n-2)\theta \\ & - A_n^2 \sin(n-2)\theta \} \sin \theta \\ & - \{ A_n^1 \sin(n-2)\theta \\ & \left. + A_n^2 \cos(n-2)\theta \} \cos \theta \} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\phi_1'}(z) = & \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \left[\{ A_n^1 \cos(n-1)\theta \right. \\ & - A_n^2 \sin(n-1)\theta \\ & \left. - i \{ A_n^1 \sin(n-1)\theta + A_n^2 \cos(n-1)\theta \} \right]\end{aligned}$$

同様に Plate の方も上記のごとく展開出来る。次に
面内力、曲げモーメント等を上式を使って表示すると、

$$\begin{aligned}\tau_{yy} - \tau_{xx} = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^{n-1} \{ A_n^1 \cos(n-3)\theta \\ & - A_n^2 \sin(n-3)\theta \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \{ B_n^1 \cos(n-1)\theta \\ & - B_n^2 \sin(n-1)\theta \} \\ & + F_x r \cos \theta - F_y r \sin \theta \\ \tau_{xy} = & \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^{n-1} \{ A_n^1 \sin(n-3)\theta \\ & + A_n^2 \cos(n-3)\theta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \{ B_n^1 \sin(n-1)\theta + B_n^2 \cos(n-1)\theta \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\mu(u + iv) = & \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{ A_n^1 \cos n\theta - A_n^2 \sin n\theta \} \\ & - i \{ A_n^1 \sin(n-2)\theta + A_n^2 \cos(n-2)\theta \} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{ \{ B_n^1 \cos n\theta - B_n^2 \sin n\theta \} \\ & - i \{ B_n^1 \sin n\theta + B_n^2 \cos n\theta \} \} \\ & - \frac{r^2}{2(1+\nu)} \{ F_x \{ \cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta \\ & - 2\nu i \sin \theta \cos \theta \} \\ & + F_y \{ -2\nu \sin \theta \cos \theta \\ & + i(\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) \} \\ M_{xx} + M_{yy} = & -\frac{(1+\nu)pr^2}{16} (3 \cos 2\theta + 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& -4(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \\ & \{ a_n^1 \cos(n-1)\theta - a_n^2 \sin(n-1)\theta \} \\ M_{yy} - M_{xx} + 2iM_{xy} = & \frac{(1-\nu)p}{16} r^2 \\ & \cdot \{ 3 + 2 \cos(-2\theta) + 2i \sin(-2\theta) \} \\ & + 2(1-\nu) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)nr^{n-1} \{ a_n^1 \cos(n-3)\theta \right. \\ & - a_n^2 \sin(n-3)\theta \} \\ & + i \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)nr^{n-1} \{ a_n^1 \sin(n-3)\theta \\ & + a_n^2 \cos(n-3)\theta \} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \{ b_n^1 \cos(n-1)\theta - b_n^2 \sin(n-1)\theta \} \\ & \left. + i \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \{ b_n^1 \sin(n-1)\theta + b_n^2 \cos(n-1)\theta \} \right] \\ Q_x - iQ_y = & -\frac{p}{8} r (7 \cos \theta - i \sin \theta) \\ & - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)nr^{n-2} \{ a_n^1 \cos(n-2)\theta \\ & - a_n^2 \sin(n-2)\theta \} \\ & - i \{ a_n^1 \sin(n-2)\theta + a_n^2 \cos(n-2)\theta \} \\ DW = & \frac{P}{32} r^4 \cos^2 \theta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \{ a_n^1 \cos(n-1)\theta - a_n^2 \sin(n-1)\theta \} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \{ b_n^1 \cos(n-1)\theta - b_n^2 \sin(n-1)\theta \}\end{aligned}$$

§ 9. 境界条件

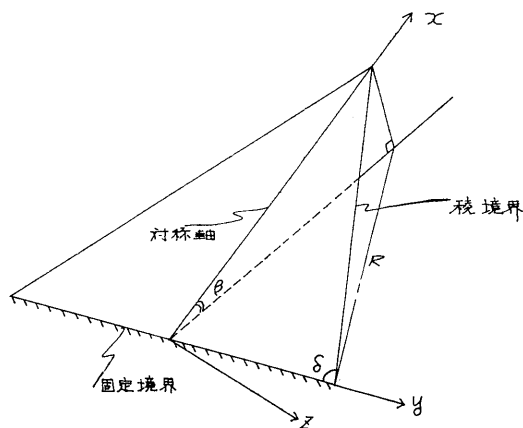


FIG. 2 座標

本論文の正角錐折版の各版は稜線に対称であり、単版は Fig. 2 に示すように x 軸に対称である。前の仮定のごとく底辺は完全固定となっている。

(a) 固定境界

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$D \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{128} (\bar{z}(z+\bar{z})^2 + 2z\bar{z}(z+\bar{z}) - \frac{1}{2} \{\bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + x'(z)\})$$

$$(2) \quad 2\mu(n+iv)=0$$

$$2\mu(n+iv) = \alpha\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \left[F_x \left\{ \frac{1+\nu}{4} (z+\bar{z})^2 - \nu z^2 \right\} + iF_y \left\{ \frac{1+\nu}{4} (z-\bar{z})^2 + \nu z^2 \right\} \right]$$

(b) 対称条件 (稜境界)

$$1. \quad u_n \sin \gamma + w \cos \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \gamma \cos \delta}{2\mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^n \{A_n^1 \cos n\theta - A_n^2 \sin n\theta\} \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \{A_n^1 \cos(n-2)\theta - A_n^2 \sin(n-2)\theta\} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{B_n^1 \cos n\theta - B_n^2 \sin n\theta\} \\ & - \frac{r^2}{2(1+\nu)} \{F_x (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) - F_y \nu \sin 2\theta\} \Big] \\ & + \frac{\sin \gamma \sin \delta}{2\mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^n \{A_n^1 \sin n\theta + A_n^2 \cos n\theta\} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \{A_n^1 \sin(n-2)\theta + A_n^2 \cos(n-2)\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{B_n^1 \sin n\theta + B_n^2 \cos n\theta\} \\ & + \frac{r^2}{2(1+\nu)} \{F_x \nu \sin 2\theta - F_y (\nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\} \Big] \\ & + \frac{\cos \delta}{D} \left[\frac{P}{32} r^4 \cos^2 \theta \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \{a_n^1 \cos(n-1)\theta - a_n^2 \sin(n-1)\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \{b_n^1 \cos(n+1)\theta - b_n^2 \sin(n+1)\theta\} \end{aligned}$$

$$2. \quad \tau_n h \cos \gamma - Q_n \sin \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} & h \cos \gamma \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{A_n^1 \cos(n-1)\theta - A_n^2 \sin(n-1)\theta\} \right. \\ & - \frac{1}{2} F_x r \cos \theta - \frac{1}{2} F_y r \sin \theta \\ & - \cos 2\delta \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) r^{n-1} \{A_n^1 \cos(n-3)\theta - A_n^2 \sin(n-3)\theta\} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{B_n^1 \cos(n-1)\theta - B_n^2 \sin(n-1)\theta\} \\ & + \frac{1}{2} F_x r \cos \theta - \frac{1}{2} F_y r \sin \theta \\ & + \sin 2\delta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) r^{n-1} \{A_n^1 \sin(n-3)\theta + A_n^2 \cos(n-3)\theta\} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{B_n^1 \sin(n-1)\theta + B_n^2 \cos(n-1)\theta\} \Big] \\ & + \frac{1}{8} p r \sin \gamma (7 \cos \delta \cos \theta + \sin \delta \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 4 \sin \gamma \left[\cos \delta \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n r^{n-2} \{a_n^1 \cos(n-2)\theta - a_n^2 \sin(n-2)\theta\} \right. \\ & - \sin \delta \sum_{n=1}^n n(n-1) r^{n-2} \{a_n^1 \sin(n-2)\theta + a_n^2 \cos(n-1)\theta\} \Big] = 0 \end{aligned}$$

$$3. \quad \tau_{ns} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) r^{n-1} \{A_n^1 \sin \{2\delta + (n-3)\theta\} + A_n^2 \cos \{2\delta + (n-3)\theta\}\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{B_n^1 \sin \{2\delta + (n-1)\theta\} + B_n^2 \cos \{2\delta + (n-1)\theta\}\} \\ & + \frac{1}{2} F_x r \cos \theta \sin 2\delta - \frac{1}{2} F_y r \sin \theta \sin 2\delta = 0 \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \delta}{D} \left[\frac{p r^3}{16} \cos \theta (\cos^2 \theta + 1) \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \{a_n^1 \cos(n-2)\theta - a_n^2 \sin(n-2)\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{a_n^1 \cos n\theta - a_n^2 \sin n\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{b_n^1 \cos n\theta - b_n^2 \sin n\theta\} \Big] \\ & + \frac{\sin \delta}{D} \left[\frac{p r^3}{16} \cos^2 \theta \sin \theta \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \{a_n^1 \sin(n-2)\theta + a_n^2 \cos(n-2)\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{a_n^1 \sin n\theta + a_n^2 \cos n\theta\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{b_n^1 \sin n\theta + b_n^2 \cos n\theta\} = 0 \end{aligned}$$

上記の固定境界条件より $x=0$ に於いて y の恒等式となり係数間の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{2} \{ (0a_1^2 - b_1^2)y + (a_2^1 - b_2^1)y^2 \\ & + (-2a_3^2 + b_3^2)y^3 + \dots \\ & + \frac{1}{2} i \{ (-2a_1^1 + b_1^1)y + (3a_2^2 - b_2^2)y^2 \\ & + (4a_3^1 - b_3^1)y^3 + \dots \} \\ & \cdot \{ -(1+\alpha)A_1^2 - B_1^2 \} y \\ & - \left\{ (2+\alpha)A_2^1 - B_2^1 + \frac{\nu F_x}{2(1+\nu)} \right\} y^2 \\ & - \{ (-3-\alpha)A_3^2 - B_3^2 \} y^3 + \dots \\ & + i \left[\{ (\alpha-1)A_1^1 + B_1^1 \} y \right. \\ & - \left\{ (\alpha-2)A_2^2 + B_2^2 + \frac{F_y}{2(1+\nu)} \right\} y^2 \\ & - \{ (\alpha-3)A_3^1 + B_3^1 \} y^3 + \dots = 0 \\ & B_2 = (2+\alpha)A_2 + \nu F_x / 2(1+\nu) \\ & B_{2n-1} = -(\alpha-2n+1)A_{2n-1} \end{aligned}$$

$$B_2(n+1) = (\alpha + 2n + 2)A_2(n+1)$$

$$b_{2n-1} = 2na_{2n-1}$$

$$b_{2n} = (2n-1)a_{2n}$$

§ 10. Point Matching

元来境界値問題において、境界条件が直線或は曲線等で与えられる、いわゆる厳密解については種々の方法が研究されているが、境界線上に数点、境界条件を満足させて解く方法は現在あまり見られない。

しかし Conway は 1960 年頃より簡単な問題、例えば、平板の曲げ、ねじり、座屈、振動等について研究し、Point Matching method と称して体系づけたようである。

Conway の上の研究によると数点の Point Matching で相当高い精度を期待出来ることが実証されている。例えば四角形板の曲げについては最大曲げモーメントは 0.39%、中央曲げモーメントは 0.4%、最大たわみは 0.14% の誤差にとどまることを示している。この場合座標軸は板中央にとり、Point Matching は $\frac{1}{2}$ の辺に対し 3 点である。

Conway の研究の他にこの方法による研究例はほとんど見当らず、特に複雑な境界値問題に関してはこれからの研究によるところが大きい。

§ 11. 座標

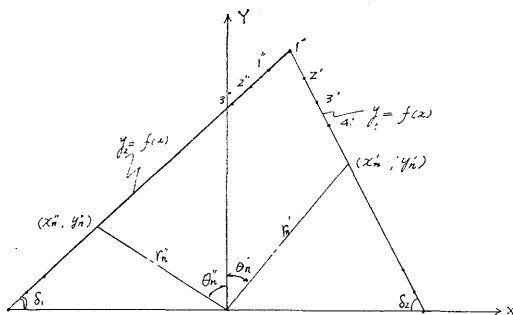


FIG. 3 座標

$$y_1 = -\tan \delta_1 x_1 + a \tan \delta_1$$

$$y_2 = \tan \delta_2 x_2 + a \tan \delta_2$$

$$\begin{cases} x_n' = \frac{a}{\tan \delta_1 + \tan \delta_2} \left\{ (\tan \delta_1 - \tan \delta_2) + \frac{2(n-1)\tan \delta_2}{n} \right\} \\ y_n' = -\tan \delta_1 x_n' + a \tan \delta_1 \end{cases}$$

$$\theta_n' = \tan^{-1} \frac{x_n'}{y_n'}, \quad r_n' = \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2}$$

$$x_n'' = \frac{a}{\tan \delta_1 + \tan \delta_2} \left\{ (\tan \delta_1 - \tan \delta_2) \right\}$$

$$-\frac{2n'' \tan \delta_1}{n} \}$$

$$y_n'' = \tan \delta_2 x_n'' + a \tan \delta_2$$

$$\theta_n'' = \tan^{-1} \frac{x_n''}{y_n''}, \quad r_n'' = \sqrt{x_n''^2 + y_n''^2}$$

ここで n = 境界線を n 等分する。

n' = 境界線 BC の n' 点目

n'' = 境界線 AB の n'' 点目

θ_n', θ_n'' = Y 軸と点 n', n'' とする角

r_n', r_n'' = 原点と n', n'' 点の距離

$$a = \frac{R_1 \sec \beta \cos \delta_2 + R_2 \cos \delta_1}{2}$$

R_1 = A 点と角錐の水平写影の中心距離

R_2 = 原点と " " " "

β = 版と水平面のなす角度

$\delta_1 = 90^\circ$ の場合

$$\begin{cases} x_n' = a \\ y_n' = 2a \tan \delta_2 \left(1 - \frac{n'-1}{n} \right) \\ x_n'' = a \left(1 - \frac{2n''}{n} \right) \\ y_n'' = \tan \delta_2 x_n'' + a \tan \delta_2 \end{cases}$$

§ 12. 結果及び考察

ここで云うたわみ (w) とは z 方向のたわみで板に直角方行である。平板を含め、角錐折版では FIG 4-1 から FIG 4-4 に示すごとく x 軸上に最大たわみが起こ

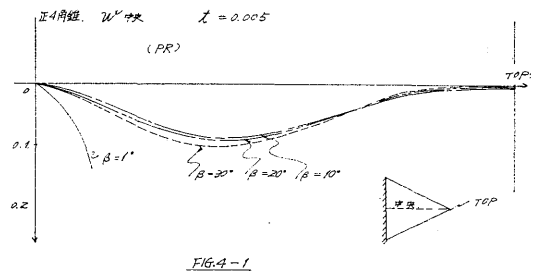


FIG. 4-1

正4角錐折版
(鉛直荷重一様 P)

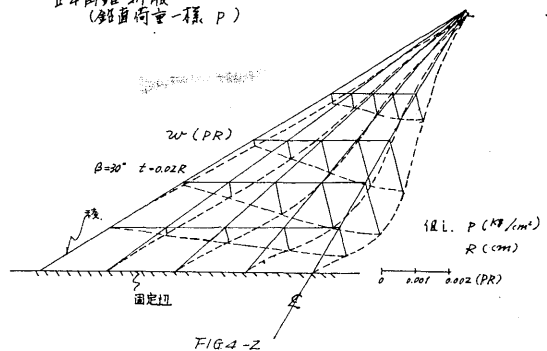
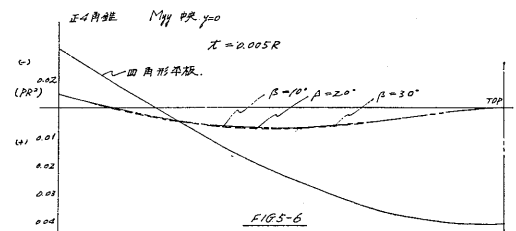
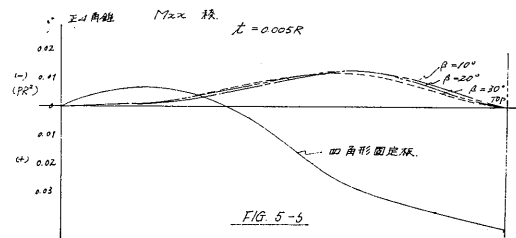
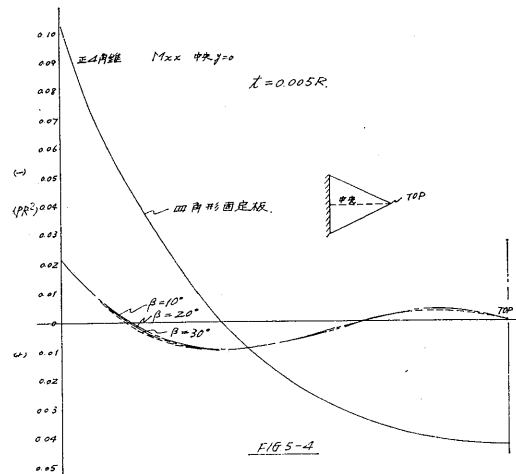
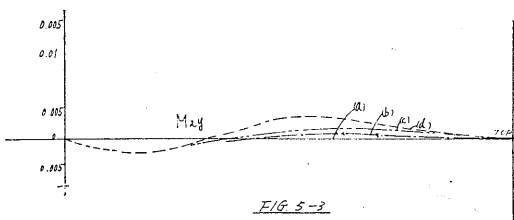
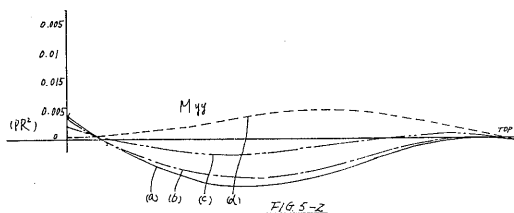
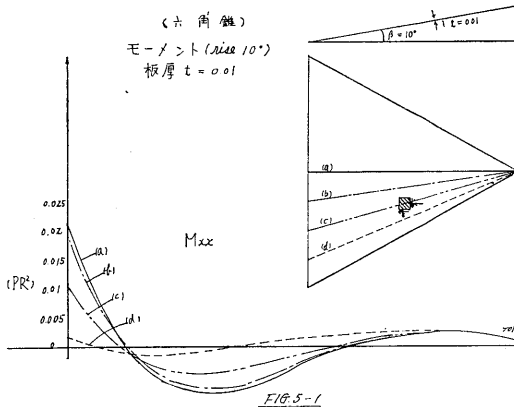
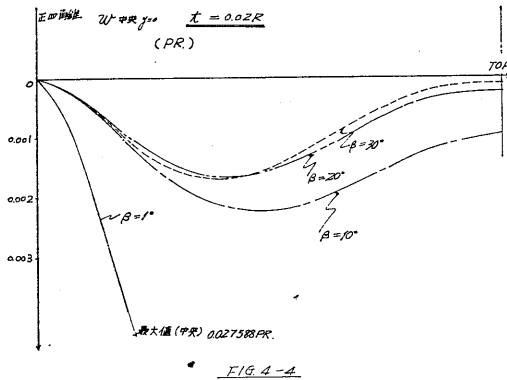
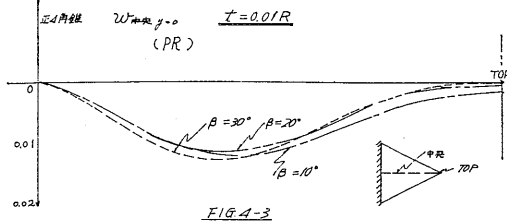


FIG. 4-2



る。ライズが平板から $\beta=1^\circ$ になると急に折版の性質が顕著に表われ、最大たわみは急激に減小し、平板の最大たわみの約 $\frac{1}{7}$ となる。さらに $\beta=4^\circ$ では $\beta=1^\circ$ の時の約 $\frac{1}{3.8}$ になる。一方水平スラストは $0^\circ \sim 1^\circ$ の間では非常に大きな値をとり、ライズが高くなるに従い減小する。一方頂点のたわみはライズが上るに従い急に小さくなり最大たわみは固定辺に向って移動する。 $\beta=10^\circ$ 以上では頂点のたわみは非常に小さくなり、同時に w の値はほぼ等しい値を示すようになる。(FIG 10—1) 最大曲げモーメント、最大たわみは $0^\circ \sim 10^\circ$ の間で変化が激しく、それ以上になるとほとんど変らなくなるのは興味ある。

最大曲げモーメントはライズ、板厚に関係なく固定端中央に起り、平板の場合、 $0.13PR^2$ 、 $\beta=4^\circ$ の時 $0.023PR^2$ 、 $\beta=10^\circ$ で $0.02PR^2$ でたわみと同様 $0^\circ \sim 10^\circ$ 近辺で急に減小する。FIG 5—2 の $\beta=10^\circ$ の場合の M_{yy}

に関して、稜線近くの M_{yy} は符号が逆転する。これはライズが上ると稜線の固定度が高まり上側引張りの状態になるためと思われる。

以下主に正4角錐折版について結果を示した。

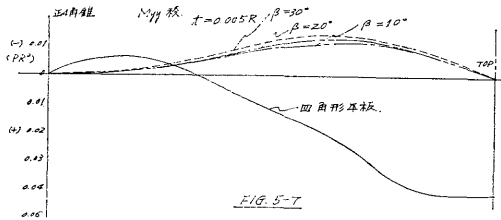


FIG. 5-7

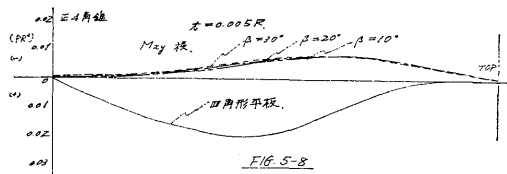


FIG. 5-8

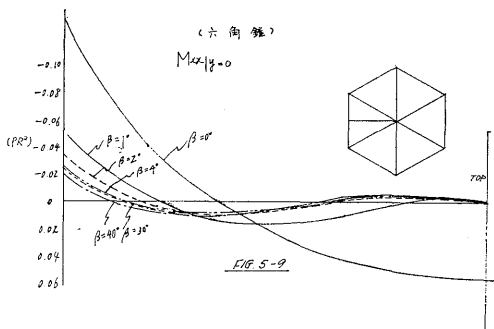


FIG. 5-9

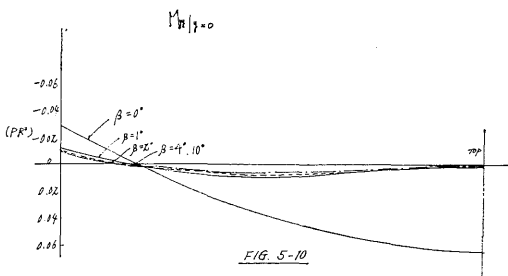


FIG. 5-10

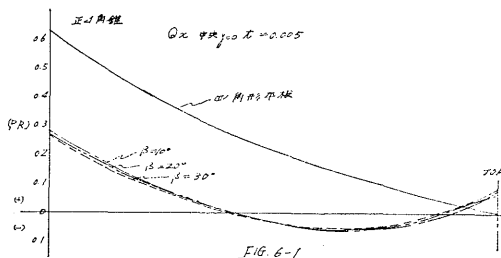


FIG. 6-1

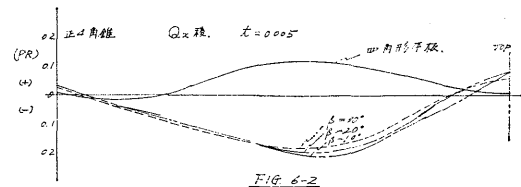


FIG. 6-2

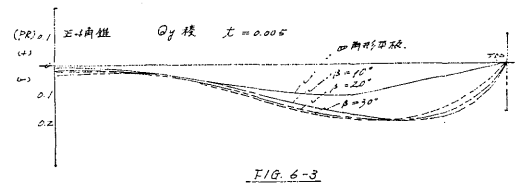


FIG. 6-3

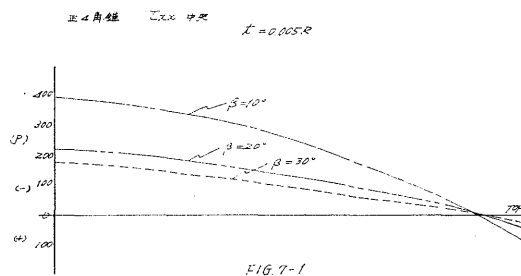


FIG. 7-1

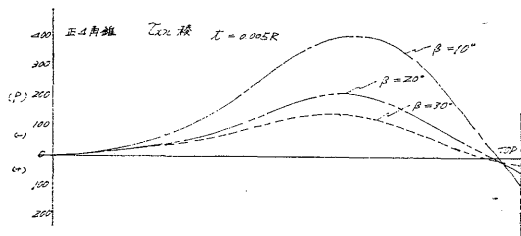


FIG. 7-2

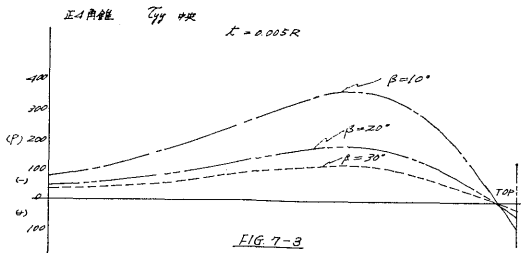


FIG. 7-3

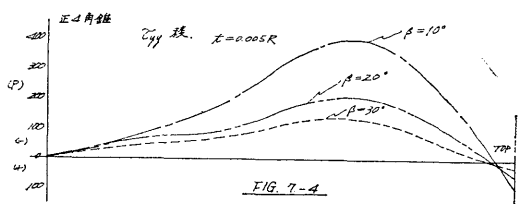


FIG. 7-4

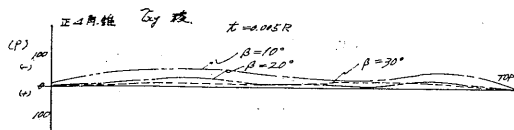


FIG. 7-5

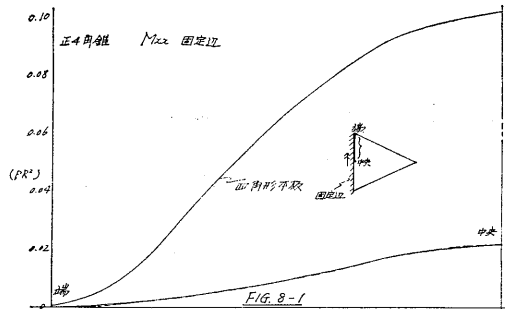


FIG. 8-1

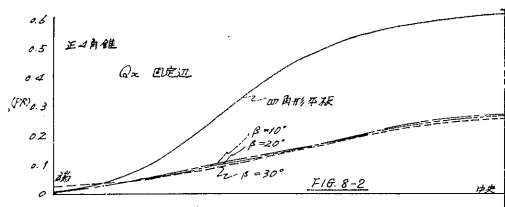


FIG. 8-2

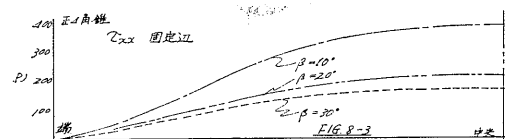


FIG. 8-3

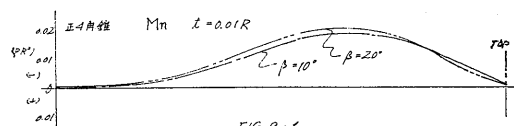


FIG. 9-1

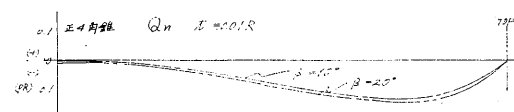


FIG. 9-2

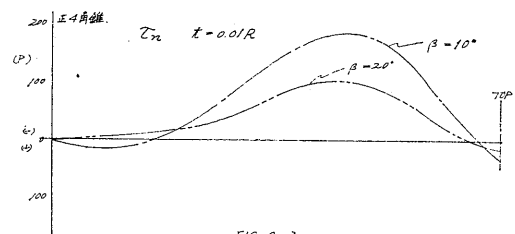


FIG. 9-3

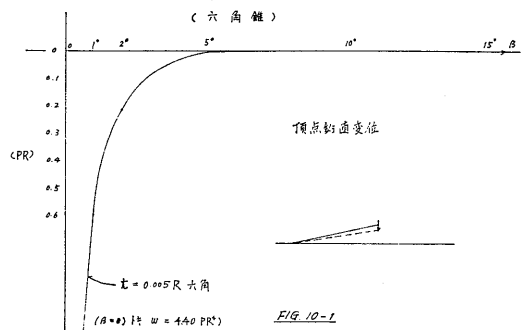


FIG. 10-1

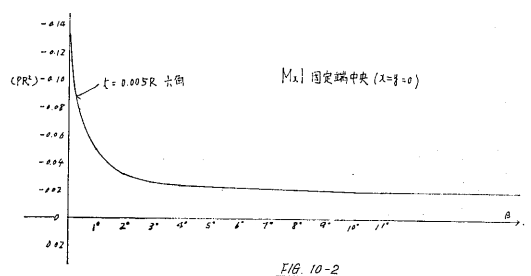


FIG. 10-2

この論文に関しては早大教授谷資信先生、木原一成先生の御指導をお受けした事を深く感謝している次第です。

参考文献

1. Prismatic shells with intermediate columns, by Victor A. Pulmano, A. M. ASCE, and seng-Lip Lee, M. ASCE
2. Some Basic Problems of the Mathematical theory of Elasticity (Fourth Edition), by N. I. Muskhelishvili
3. Mathematical theory of Elasticity by, I. S. Sokolnikoff