

Hausdorff の moment の問題の多次元への拡張について

森 俊 夫*

On the Multi-dimensional Moment Problem of Hausdorff

Toshio MORI

This paper deals with the formulation and the solution of the multi-dimensional moment problem of Hausdorff. Let I^n be the set of all n -dimensional vectors whose components are non-negative integers, and let $\{a(i); i \in I^n\}$ be a sequence of real numbers. Denote by S_n the set $\{(x_1, \dots, x_n); x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ of the n -dimensional space. Necessary and sufficient conditions for the existence of a measure and a signed measure μ on S_n such that

$$a(i) = \int_{S_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} d\mu \quad (i = (i_1, \dots, i_n) \in I^n)$$

are given.

1. 古典解析学における Hausdorff の moment の問題とは次のようなものである。実数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ が与えられたとき、閉区間 $[0, 1]$ 上で有界変動の函数（または有界な単調非減少函数） $\alpha(t)$ を見出して

$$(1) \quad a_n = \int_0^1 t^n d\alpha(t) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

と表わすことができるためには、 $\{a_n\}$ がいかなる条件を満たせばよいかというのである。これに関して次の基本的な結果が知られている（例えば Widder 2 参照）。

$$\Delta^k a_n = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} a_{n+k-m} \quad (k, n=0,1,2,\dots),$$

$$\lambda_{k,m} = \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \Delta^{k-m} a_m \quad (k, m=0,1,2,\dots)$$

とおくとき、 a_n が有界変動函数 $\alpha(t)$ によって (1) のように表わされるためには

$$(2) \quad \sum_{m=0}^k |\lambda_{k,m}| < L \quad (k=0,1,2,\dots)$$

なるような定数 L の存在することが必要十分であり、また a_n が有界な単調非減少函数 $\alpha(t)$ によって (1) のように表わされるためには

$$(3) \quad (-1)^k \Delta^k a_n \geq 0 \quad (k, n=0,1,2,\dots)$$

なることが必要十分である。

この論文の目的は n 重数列についてこれらに対応する定理を証明することである。

はじめに記号を定義しておく。すべての非負整数の集合を I で、また非負整数を成分とするすべての n 次元 vector $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ の集合を I^n で表わす。第 α 成分のみ 1 で他の成分がすべて 0 であるような I^n の元を e_α と書く。 $i = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in I^n$ の絶対値を $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ によって定義し、また $k \geq |i|$ なる自然数 k に対し

* 中部工業大学数学助教授

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_n! (k - |i|)!}$$

と書くことにする。 $k < |i|$ のときおよび $i \in I^n$ でないときは $\binom{k}{i} = 0$ とする。 n 重実数数列 $\{a(i)\}_{i \in I^n}$ に対して

$$\Delta a(i) = a(i) - \sum_{\alpha=1}^n a(i + e_\alpha) \quad (i \in I^n)$$

と定義し、任意の自然数 k に対しては $\Delta^k a(i) = \Delta(\Delta^{k-1} a(i))$ によって $\Delta^k a(i)$ を定義する。 S_n で n 次元 Euclid 空間の部分集合 $\{(x_1, \dots, x_n); x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ を表わすことにする。

この論文の結果は次の二つの定理の中に述べられている。

定理1. $\{a(i)\}_{i \in I^n}$ を n 重実数数列とする。 S_n 上の有界な測度 μ によって

$$(4) \quad a(i) = \int_{S_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} d\mu \quad (i \in I^n)$$

と表わされるための必要十分条件は

$$(5) \quad \Delta^k a(i) \geq 0 \quad (i \in I^n; k=0, 1, 2, \dots)$$

なることである

定理2. $\{a(i)\}_{i \in I^n}$ を n 重実数数列とする。 S_n 上の有界な signed measure μ によって $a(i)$ が (4) のように表わされるための必要十分条件は

$$(6) \quad \sum_{|i| \leq k} \binom{k}{i} \Delta^{k-|i|} a(i) \leq L \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

なるような定数 L が存在することである。ここに (6) の和は $|i| \leq k$ なるようなすべての $i \in I^n$ にわたってとるものとする。

これらの定理の証明は 1 次元の場合にならって 2) と同様な方法で行うことができる。しかしわれわれは次節で確率論における exchangeable な確率変数数列に関する理論を応用してこれを証明することにしよう。

2. ここでまず exchangeable な確率変数数列について説明しておく。 $\{X_n\}_{n=1, 2, \dots}$ を標本空間 (Ω, A, P) 上で定義された確率変数の列とする。任意の自然数 k , および $(1, 2, \dots, k)$ の任意の順列 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ に対して $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})$ の同時分布が $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ の同時分布に一致するとき、確率変数数列 $\{X_n\}$ は exchangeable であるという。

exchangeable な確率変数数列に関して次の結果が知られている (例えば Loève 1)。

$\{X_n\}_{n=1, 2, \dots}$ を標本空間 (Ω, A, P) 上で定義された exchangeable な確率変数数列とする。このとき σ -代数 $B \subset A$ が存在して、 B を与えたときの $X_1, X_2, \dots, X_n$ の条件つき分布関数を

$$F^B(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n | B\}$$

とすれば

$$F^B(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^B(x_1) F^B(x_2) \cdots F^B(x_n)$$

である。すなわち $X_1, X_2, \dots$ は B を与えたとき条件つき独立である。

この結果の系として直ちに次の補助定理が得られる。

(2)

補助定理 $\{X_k\}_{k=1,2,\dots}$ を有限な状態空間 $\{0,1,\dots,n\}$ を持つ exchangeable な確率変数列とする。このときある σ -代数 $B \subset A$ が存在して、任意の $k; x_1, x_2, \dots, x_k$ に対して

$$(7) \quad P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_k=x_k | B\} \\ = (1-P_1^B - \dots - P_n^B)^{i_0} (P_1^B)^{i_1} \dots (P_n^B)^{i_n}$$

である。ここに $P_j^B = P\{X_1=j | B\}$ ($j=1,2,\dots,n$) であり、また $i_0, i_1, \dots, i_n$ はそれぞれ $x_1, x_2, \dots, x_k$ のうち $0, 1, \dots, n$ に等しいものの個数である。

(定理1の証明) 定理の条件が必要であることは容易にわかる。実際 S_n 上の有界な測度 μ によって $a(i)$ が(4)のように表わされるならば

$$(8) \quad \Delta^k a(i) = \int_{S_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} (1-x_1 - \dots - x_n)^k d\mu \\ (i \in I^n; k=0,1,2,\dots)$$

であるが、右辺の被積分関数は S_n 上で非負だから積分の値も非負でなければならない。

次に十分性を示す。 $a(0)=0$ の場合は(5)より $a(i)=0$ ($i \in I^n$) となり、(4)は $\mu(S_n)=0$ なる測度 μ によって満されている。 $a(0)>0$ のときはこの値を1としても一般性を失わないから以下そのように仮定する。有限な状態空間 $\{0,1,\dots,n\}$ を持つ確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ の分布を次のように定義する。すなわち任意の自然数 k と 0 と n の間の自然数 $x_1, \dots, x_k$ に対し

$$(9) \quad P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_k=x_k\} = \Delta^{i_0} a(i)$$

とする。ここに $i=(i_1, i_2, \dots, i_n)$ で $i_0, i_1, \dots, i_n$ は $x_1, x_2, \dots, x_k$ のうちそれぞれ $0, 1, \dots, n$ に等しいものの個数である。(5)の仮定から(9)で与えられる分布を持つような確率変数列が存在することがわかるのである。(9)より明らかに $\{X_n\}$ は exchangeable な確率変数列となる。 $\{X_n\}$ が定義されている標本空間を (Ω, A, P) とすれば補助定理によりある σ -代数 $B \subset A$ が存在して(7)が成立する。故に(9)から

$$(10) \quad \Delta^{i_0} a(i) = P\{X_1=x_1, \dots, X_k=x_k\} \\ = E\{P\{X_1=x_1, \dots, X_k=x_k | B\}\} \\ = E\{(1-P_1^B - \dots - P_n^B)^{i_0} (P_1^B)^{i_1} \dots (P_n^B)^{i_n}\}$$

ここに $x_1, x_2, \dots, x_k$ はそのうち $i_0, i_1, \dots, i_n$ 個がそれぞれ $0, 1, \dots, n$ に等しくなるようにえらんだものである。特に(10)で $i_0=0$ とすれば

$$(11) \quad a(i) = E\{(P_1^B)^{i_1} \dots (P_n^B)^{i_n}\} \quad (i \in I^n)$$

したがって $(P_1^B, \dots, P_n^B)$ の同時分布を μ とすれば、確率1で $P_j^B \geq 0$ ($j=1,2,\dots,n$) かつ $P_1^B + \dots + P_n^B \leq 1$ なることから測度 μ の carrier は S_n に含まれる。よって(11)より

$$a(i) = \int_{S_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} d\mu \quad (i \in I^n)$$

これで定理は証明された。

(定理2の証明) 必要性はほとんど明らかである。実際 μ を S_n 上の有界な signed measure とすれば(4)より任意の k に対し

$$\begin{aligned}
& \sum_{|i| \leq k} \left| \binom{k}{i} \Delta^{k-|i|} a(i) \right| \\
&= \sum_{|i| \leq k} \left| \binom{k}{i} \int_{S_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} (1-x_1-\cdots-x_n)^{k-|i|} d\mu \right| \\
&\leq \int_{S_n} |d\mu| < \infty
\end{aligned}$$

次に定理の条件が十分であることを証明するために、 $a(i)$ が定理 1 の条件を満す二つの n 重数列 $b(i)$ と $c(i)$ との差として表わされることを示す。ここで次のように定義する。 $j=(j_1, \dots, j_n) \in I^n$ と $k, l \in I$ に対し

$$(12) \quad d_k(j) = \sum_{|i| \leq k} \binom{i_1}{k}^{j_1} \cdots \binom{i_n}{k}^{j_n} \left| \Delta^{k-|i|} a(i) \right|$$

$$(13) \quad \bar{d}_k(j; l) = \sum_{|i| \leq k} \binom{k}{i} \left| \Delta^{k+l-|i|} a(i+j) \right|,$$

ここに(12), (13)の右辺の和は $|i| \leq k$ なるすべての $i=(i_1, \dots, i_n) \in I^n$ についてとるものとする。

(6)と(13)より任意の $j \in I^n$, $k, l \in I$ に対し

$$\begin{aligned}
(14) \quad \bar{d}_k(j; l) &= \sum_{\substack{|i| \leq k \\ i \geq j}} \binom{k}{i-j} \left| \Delta^{k+l+|j|-|i|} a(i) \right| \\
&\leq \sum_{|i| \leq k} \binom{k+l+|j|}{i} \left| \Delta^{k+l+|j|-|i|} a(i) \right| \leq L
\end{aligned}$$

ただし(14)の中で $i \geq j$ は $i_1 \geq j_1, \dots, i_n \geq j_n$ なることを意味する。一方 Δ の定義より

$$\begin{aligned}
(15) \quad \bar{d}_k(j; l) &\leq \sum_{|i| \leq k} \binom{k}{i} \left| \Delta^{k+l+1-|j|} a(i+j) \right| \\
&\quad + \sum_{|i| \leq k} \sum_{a=1}^n \binom{k}{i} \left| \Delta^{k+l-|i|} a(i+j+e_a) \right| \\
&= \sum_{|i| \leq k+1} \binom{k+1}{i} \left| \Delta^{k+l-|i|} a(i+j) \right| \\
&= \bar{d}_{k+1}(j; l),
\end{aligned}$$

ここで

$$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \sum_{a=1}^n \binom{k}{i-e_a}$$

なる関係を使った。(14)と(15)から任意の $j \in I^n$ と $l \in I$ に対し有限な極限

$$(16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}_k(j; l) = \bar{d}(j; l)$$

の存在がわかる。一方

$$\begin{aligned}
(17) \quad |\bar{d}_{k-l-|j|}(j; l) - \Delta^l d_k(j)| \\
\leq \sum_{\substack{|i| \leq k-l \\ i \geq j}} \left| \binom{k-l-|j|}{i-j} \binom{k}{i}^{-1} - \binom{i_1}{k}^{j_1} \cdots \binom{i_n}{k}^{j_n} \left(1 - \frac{|i|}{k}\right)^l \right| \binom{k}{i} \left| \Delta^{k-|i|} a(i) \right| \\
+ \sum_{\substack{|i| \leq k-l \\ i \neq j}} \binom{i_1}{k}^{j_1} \cdots \binom{i_n}{k}^{j_n} \left(1 - \frac{|i|}{k}\right)^l \binom{k}{i} \left| \Delta^{k-|i|} a(i) \right|
\end{aligned}$$

であるが, ここで $i_1=kx_1, \dots, i_n=kx_n$ とおくと任意の j, l に対して

$$\begin{aligned} & \left| \binom{k-l-|j|}{i-j} \binom{k}{i}^{-1} - \left(\frac{i_1}{k}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{i_n}{k}\right)^{j_n} \left(1 - \frac{|i|}{k}\right)^l \right| \\ &= \frac{kx_1(kx_1-1) \dots (kx_1-j_1+1) kx_2(kx_2-1) \dots (kx_2-j_2+1) k(1-|x|) \{k(1-|x|)-1\} \dots \{k(1-|x|)-l+1\}}{k(k-1) \dots (k-|j|-l+1)} \\ & \quad - x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} (1-|x|)^l \quad (|x|=x_1+\dots+x_n) \end{aligned}$$

は $k \rightarrow \infty$ のとき $(x_1, \dots, x_n) \in S_n$ に一様に 0 に収束する。故に (17) の右辺の第 1 の和は $k \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。また第 2 の和は $|j|L/k$ をこえないから結局 $k \rightarrow \infty$ のとき

$$|d_{k-l-|j|}(j; l) - \Delta^l d_k(j)| \rightarrow 0 \quad (j \in I^n, l \in I)$$

したがって (16) から

$$(18) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^l d_k(j) = \Delta^l d(j) = \bar{d}(j; l) \quad (j \in I^n, l \in I)$$

が得られる。ここに

$$d(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k(j) = \bar{d}(j; 0)$$

である。さらに任意の j, l に対し

$$\begin{aligned} |\Delta^l a(j)| &= \left| \sum_{|i| \leq k} \binom{k}{i} \Delta^{k+l-|i|} a(i+j) \right| \\ &\leq \sum_{|i| \leq k} \binom{k}{i} \left| \Delta^{k+l-|i|} a(i+j) \right| \\ &= \bar{d}_k(j; l) \end{aligned}$$

であるから $k \rightarrow \infty$ として (18) より

$$(19) \quad |\Delta^l a(j)| \leq \Delta^l d(j) \quad (j \in I^n, l \in I)$$

となる。そこで $b(j) = (d(j) + a(j))/2$, $c(j) = (d(j) - a(j))/2$ とおけば $\{b(j)\}$, $\{c(j)\}$ は (19) より定理 1 の条件 (5) を満すから $j \in I^n$ に対し

$$b(j) = \int_{S_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} d\mu_1$$

$$c(j) = \int_{S_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} d\mu_2$$

なるような S_n 上の有界な測度 μ_1, μ_2 が存在する。故に $\mu = \mu_1 - \mu_2$ とすれば, μ は S_n 上の有界な signed measure であり

$$a(j) = b(j) - c(j) = \int_{S_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} d\mu \quad (j \in I^n)$$

となる。これで定理の証明は完了した。

文 献

- 1) LOEVE, M., Probability Theory, Van Nostrand (1955).
- 2) WIDDER, D. V., The Laplace Transform, Princeton (1942).