クンマー関数 $\boldsymbol{U(a,b,x)}$ の計算法とその誤差解析

吉田　年雄

1　はじめに

クンマー（Kummer）関数 $M(a,b,x)$ と $U(a,b,x)$ は，そのパラメータ a と b により，ベッセル関数，変形ベッセル関数，不完全ガンマ関数など広範囲な関数を表すことができる重要な関数である．クンマー関数は合流型超幾何関数とも呼ばれる．

クンマー関数は次のクンマーの微分方程式

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+(b-x)\frac{dw}{dx}-aw=0 \tag{1}$$

を満足する．

$M(a,b,x)$ のテーラー展開は次式で表される．

$$M(a,b,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!(b)_k}x^k \tag{2}$$

ここで，$(a)_k$ はポッホハンマーの記号（Pochhammer's symbol）で，

$$\begin{aligned}(a)_k&=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)\\(a)_0&=1\end{aligned} \tag{3}$$

である．上式で，$\Gamma(a)$ はガンマ関数である．

$U(a,b,x)$ は次式で定義される．

$$\begin{aligned}U(a,b,x)&=\frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\frac{M(a,b,x)}{\Gamma(a-b+1)\Gamma(b)}-x^{1-b}\,\frac{M(a-b+1,2-b,x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right\}\\&=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}M(a,b,x)+\frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{1-b}M(a-b+1,2-b,x)\end{aligned} \tag{4}$$

この $U(a,b,x)$ に対して，Temme により，ミラー（Miller）の方法，すなわち，漸化式を用いる計算法が提案されている．しかし，今までに，この計算法の誤差解析は行われていない．最近になって，筆者はその誤差解析を行うことができた．それで，本論文では，$a\geq 0$，$b\geq 0$，$x>0$ の場合について，漸化式を用いる $U(a,b,x)$ の数値計算法の誤差解析を述べる．

この方法は，x が大きく，b が大きくない場合に有効であるが，このことは誤差解析からも分かる．

2　ミラーの方法

本論文では，

$$f_n(x)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}U(a+n,b,x) \tag{5}$$

に対して，ミラーの方法を適用する．ただし，

$$0 \leq a < 1 \quad n: \text{非負の整数} \tag{6}$$

とする．

m を適当に選ばれた正の整数とし，α を小さな任意定数とする．

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = \alpha \tag{7}$$

を初期値として，式 (5) の関数 $f_k(x)$ が満足する漸化式

$$(a+k-1)F_{k-1}(x) = (x+2a-b+2k)F_k(x) - (a-b+k+1)F_{k+1}(x) \tag{8}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{m-1}(x)$，$F_{m-2}(x)$，$\cdots$，$F_0(x)$ を順次，計算する．そのとき，ある $N(< m)$ に対して，$n = 0, 1, \cdots, N$ についての $f_n(x)$ の計算式は

$$f_n(x) \doteqdot x^{-a} F_n(x) \Bigg/ \sum_{k=0}^{m} \epsilon_k F_k(x) \tag{9}$$

として与えられる．ここで，

$$\epsilon_k = \frac{(a-b+1)_k}{k!} = \frac{\Gamma(a-b+k+1)}{k!\Gamma(a-b+1)} \tag{10}$$

である．なお，整数 m は漸化式の繰り返し回数となっている．

ここでは，$f_n(x)$ の計算法の誤差解析について述べる．

3　誤差解析

漸化式 (8) の一般解は

$$F_n(x) = \xi f_n(x) + \eta g_n(x) \tag{11}$$

として表される．ここで，

$$g_n(x) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+n+1)} M(a+n, b, x) \tag{12}$$

であり，ξ と η は任意定数である．これらの任意定数は式 (7) によって決められる．したがって，

$$F_{m+1}(x) = \xi f_{m+1}(x) + \eta g_{m+1}(x) = 0 \tag{13}$$

が得られる．式 (11) と (13) から η を消去すると次式を得る．

$$F_n(x) = \xi \left(f_n(x) - \frac{f_{m+1}(x) g_n(x)}{g_{m+1}(x)} \right) \tag{14}$$

$f_k(x)$ に対して，次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k f_k(x) = x^{-a} \tag{15}$$

が成り立つ．式 (14) と上式より，

$$\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\left(\frac{F_k(x)}{\xi}+\frac{f_{m+1}(x)g_k(x)}{g_{m+1}(x)}\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\epsilon_k f_k(x)=x^{-a} \tag{16}$$

が得られる．式 (14) と上式から ξ を消去すると次式が求められる．

$$f_n(x)=\frac{x^{-a}F_n(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k F_k(x)}\{1-\Phi_m(a,b,x)\}+\frac{f_{m+1}(x)g_n(x)}{g_{m+1}(x)} \tag{17}$$

ただし，

$$\Phi_m(a,b,x)=x^a\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{f_{m+1}(x)g_k(x)}{g_{m+1}(x)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\epsilon_k f_k(x)\right) \tag{18}$$

である．式 (17) は $f_n(x)$ の計算式 (9) の誤差を的確に表している．

式 (17) の右辺の第 2 項を $f_n(x)$ で割ったものを

$$\Theta_{mn}(a,b,x)=\frac{f_{m+1}(x)g_n(x)}{f_n(x)g_{m+1}(x)} \tag{19}$$

とおく．計算式 (9) の相対精度

$$\varepsilon_{mn}(x)=\frac{x^{-a}F_n(x)\Bigg/\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k F_k(x)-f_n(x)}{f_n(x)} \tag{20}$$

は

$$\varepsilon_{mn}(x)=\frac{\Phi_m(a,b,x)-\Theta_{mn}(a,b,x)}{1-\Phi_m(a,b,x)} \tag{21}$$

と表され，$|\Phi_m(a,b,x)|\ll 1$ のときには，

$$\varepsilon_{mn}(x)\fallingdotseq\Phi_m(a,b,x)-\Theta_{mn}(a,b,x) \tag{22}$$

と近似できる．

式 (7) を初期値として，漸化式 (8) を繰り返し適用することにより得られた $F_{m-1}(x)$，$F_{m-2}(x)$，$\cdots$，$F_0(x)$ を用いて，式 (9) により，10 進 p 桁の精度で $f_n(x)$ を計算できるためには，次の二つの不等式

$$|\Phi_m(a,b,x)|<0.5\times10^{-p} \tag{23}$$

$$|\Theta_{mn}(a,b,x)|<0.5\times10^{-p} \tag{24}$$

が成り立てばよい．上の二つの不等式から，要求精度で $f_n(x)$ を求めるための漸化式の繰り返し回数を決めることができる．

$\Phi_m(a,b,x)$ は次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned}\Phi_m(a,b,x)&=x^a\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{f_{m+1}(x)g_k(x)}{g_{m+1}(x)}+\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon_k f_k(x)-\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k f_k(x)\right)\\&=x^a\left(\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k\frac{f_{m+1}(x)g_k(x)}{g_{m+1}(x)}+x^{-a}-\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k f_k(x)\right)\\&=\frac{x^a\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\epsilon_k R_{mk}(x)+g_{m+1}(x)}{g_{m+1}(x)}\end{aligned} \tag{25}$$

ただし，

$$R_{mk}(x) = f_{m+1}(x)g_k(x) - f_k(x)g_{m+1}(x) \tag{26}$$

である．

4　おわりに

式 (25) を変形し，$\Phi_m(x)$ の評価式を導いている．ミラーの方法は，予め，漸化式の繰り返し回数を指定しておかなければならない．そこで，任意精度で自動的に関数値を得ることができるドイフルハート（Deuflhard）の方法を提案している．本研究は完成しているので，極く近いうちに，情報処理学会論文誌に投稿する．