プロジェクト 57a
「漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\boldsymbol{\gamma(\nu, x)}$ の数値計算法の誤差解析」の終了

吉田　年雄

1　不完全ガンマ関数 $\boldsymbol{\gamma(\nu, x)}$ の数値計算法

不完全ガンマ関数はベッセル関数と同様に，いろいろな分野で用いられている重要な関数であり，用途については言うまでもない．不完全ガンマ関数と呼ばれる関数には次の 2 つのものがある[4]．

$$\gamma(\nu, x) = \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad (\nu > 0) \tag{1}$$

$$\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt \tag{2}$$

また，ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ を用いれば，両者の間に次の関係式が成り立つ．

$$\gamma(\nu, x) + \Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) \tag{3}$$

さらに，式 (1) の部分積分より次式が得られる．

$$\gamma(\nu+1, x) = \nu\gamma(\nu, x) - x^\nu e^{-x} \tag{4}$$

$\gamma(\nu, x)$ のテーラー展開式は

$$\gamma(\nu, x) = x^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^k}{k!(\nu+k)} \tag{5}$$

$$= x^\nu e^{-x}\Gamma(\nu) \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\Gamma(\nu+k+1)} = x^\nu e^{-x} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \tag{6}$$

として表される．

$\gamma(\nu, x)$ の計算法としては，上記のテーラー展開式，連分数展開式による方法と次に説明する漸化式を用いる方法がある．漸化式を用いる方法には，計算法 I と計算法 II がある．次数 ν は正の実数，x は非負の実数とする．n を非負の整数として，

$$\nu = a + n \qquad (0 < a \leq 1) \tag{7}$$

と置けば，与えられた ν の値に対して，a と n が一意に決まる．

計算法 I

計算法 I は，Gautschi[2] により提案された（$P(\nu, x) = \gamma(\nu, x)/\Gamma(\nu)$ に対して）．m を適当に選ばれた正の整数とし（$m > n$），α を小さな任意定数とする．

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = \alpha \tag{8}$$

を出発値として，$\gamma(a+k, x)$ が満たす漸化式

$$F_{k-1}(x) = \frac{a+k+x}{(a+k-1)x} F_k(x) - \frac{1}{(a+k-1)x} F_{k+1}(x) \tag{9}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{m-1}(x)$，$F_{m-2}(x)$，$\cdots$，$F_n(x)$，$\cdots$，$F_0(x)$ を順次，計算する．そのとき，ある N $(< m)$ に対して，$n = 0, 1, \cdots, N$ についての $\gamma(a+n, x)$ の計算式は次式で与えられる．

$$\gamma(a+n,x) \fallingdotseq \frac{x^a}{a} F_n(x) \bigg/ \sum_{k=0}^{m} \frac{F_k(x)}{k!} \tag{10}$$

計算法 II

計算法 II も Gautschi[3] により提案された．式 (4) より，$\gamma(a+n,x)$ は，漸化式

$$F_k(x) = \frac{F_{k+1}(x) + x^{a+k} e^{-x}}{a+k} \tag{11}$$

を満たす．

$$F_{m+1}(x) = 0 \tag{12}$$

を出発値として，漸化式 (11) を繰り返し使うことにより得られた $F_n(x)$ を用いて，$\gamma(a+n,x)$ は

$$\gamma(a+n,x) \fallingdotseq F_n(x) \tag{13}$$

として求められる．

2　誤差解析をまとめ，論文誌に投稿，採録

これらの漸化式を用いる $\gamma(a+n,x)$ の計算法の誤差解析は行われていなかった．そこで，誤差解析を行い，それをまとめて，情報処理学会論文誌に投稿した結果，採録された（参考文献 [1]）．このように，本プロジェクトでは貴重な研究成果をあげることができたと考えられる．本計算法の誤差解析の詳細については，その論文を参照されたい．

参考文献

[1] 吉田年雄 : 漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.53，No.8，pp.1954-1961(2012).

[2] Gautschi, W.: A Computational Procedure for Incomplete Gamma Functions, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 5, No. 4, pp. 466–481 (1979).

[3] Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-term Recurrence, *SIAM Review*, Vol. 9, No. 1, pp. 24–82 (1967).

[4] Abramowitz, M, and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.260, Dover Publication(1972).

[5] 吉田年雄，二宮市三 : x が小さい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌, Vol.23, No.5, pp.522-528(1982).