

「漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の数値計算法の誤差解析」の研究の進捗状況

Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Incomplete Gamma Function $\gamma(\nu, x)$

吉田 年雄
Toshio Yoshida

キーワード: 不完全ガンマ関数 合流型超幾何関数 漸化式 誤差解析

1 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の数値計算法

不完全ガンマ関数は、ベッセル関数と並んで、理工学分野で最も使われる特殊関数である。不完全ガンマ関数と呼ばれる関数には次の二つのものがある。

$$\gamma(\nu, x) = \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

$$\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad (2)$$

また、ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ を用いれば、両者の間に次の関係式が成り立つ。

$$\gamma(\nu, x) + \Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) \quad (3)$$

$\gamma(\nu, x)$ の展開式は

$$\gamma(\nu, x) = x^\nu e^{-x} \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\nu + k + 1)} \quad (4)$$

で与えられる。

$\gamma(\nu, x)$ の計算法としては、テーラー級数、連分数による方法、積分表示式を数値積分する方法があるが、本研究では、漸化式による方法に限定することにする。この方法の特長は、ある N に対して、 $n = 0, 1, \dots, N$ の不完全ガンマ関数 $\gamma(a + n, x)$ を一斉に求めることができることである。

漸化式を用いる計算法は、Gautschi により提案された ($P(\nu, x) = \gamma(\nu, x)/\Gamma(\nu)$ に対して)。しかし、誤差解析は未だ行われていない。本研究では、漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の計算法の誤差解析を行っている。その結果として、 $\gamma(\nu, x)$ の計算式の誤差の表示式を求めている。それを式変形することにより、誤差の簡潔な表示式を得ており、これは、初めて示す結果である。なお、 $\Gamma(\nu, x)$ の計算法については文末の文献を参考にされたい。計算法を述べよう。 m を適当に選ばれた正の整数とし、 α を小さな任意定数とする。また、 $\nu = a + n$ と置く。ただし、

$$0 < a \leq 1 \quad (5)$$

とする.

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = \alpha \quad (6)$$

を出発値として, $\gamma(a+n, x)$ が満たす漸化式

$$F_{n-1}(x) = \frac{a+n+x}{(a+n-1)x} F_n(x) - \frac{1}{(a+n-1)x} F_{n+1}(x) \quad (7)$$

を繰り返し使うことにより, $F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \dots, F_0(x)$ を順次, 計算する. そのとき, ある $N (< m)$ に対して, $n = 0, 1, \dots, N$ についての $\gamma(a+n, x)$ の計算式は次式で与えられる.

$$\gamma(a+n, x) \doteq \frac{\frac{x^a}{m} F_n(x)}{\sum_{k=0}^m \frac{F_k(x)}{k!}} \quad (8)$$

本研究では, この計算法の誤差解析を行った. 漸化式 (7) の一般解を示し, それと出発値 (6) から, 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ とその計算式 (8) の関係を的確に表す誤差表示式を導出した. その表示式から, 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ が 10 進 16 桁の精度で計算できる条件を示した. その条件式の表式は, 少し複雑な級数で表されるが, 式変形を行って工夫することにより, 簡潔な評価式を得ている. 能率的な計算のためには, 漸化式の繰り返し回数は, 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ が要求精度で計算できる最小に選ぶことが必要である. それを求め, 不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の能率的な数値計算法を提案している.

研究結果の詳細は, 学会への投稿前なので詳しくは述べることができない. 本稿では, 概要を記述するだけにとどめる.

2 進捗状況

「不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算法の誤差解析」というタイトルの論文を作成中である. 論文の本文は殆ど作成済みであり, 和文と英文のアブストラクトが未完成である. 今年度末までに完成させ, 情報処理学会論文誌に投稿する予定である.

また, 本研究に関連して, クンマー関数 $M(a, a+n, x)$ を含む関数 $\Gamma(a)/\Gamma(a+n+1)M(a, a+n, x)$ とクンマー関数 $U(a+n, a, x)$ を含む $\Gamma(a+n)/\Gamma(a)U(a+n, a, x)$ に対して, 漸化式を用いる計算法の研究を進行中である.

参考文献

- [1] Abramowitz, M, and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.260, Dover Publication(1972).
- [2] 山内二郎, 宇野利雄, 一松 信: 電子計算機のための数値計算法 III, pp.132-153, 培風館 (1972).
- [3] 吉田年雄, 二宮市三: x が小さい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol.23, No.5, pp.522-528(1982).
- [4] 吉田年雄, 二宮市三: x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.2, pp.306-312(1984).